

1

- a) Sijoitetaan luvut $r = 6$ ja $s = -1$ yhtälöparin

$$\begin{cases} r + 4s = 2 \\ 2r - 12s = 0 \end{cases}$$

molempiin yhtälöihin:

$$r + 4s = 2$$

$$2r - 12s = 0$$

$$6 + 4 \cdot (-1) = 2$$

$$2 \cdot 6 - 12 \cdot (-1) = 0$$

$$6 - 4 = 2$$

$$12 + 12 = 0$$

$$2 = 2$$

$$24 = 0$$

tosi

epätosi

Koska sijoitetut luvut eivät toteuta yhtälöparin molempia yhtälöitä, ne eivät myöskään toteuta yhtälöparia.

b) Sijoitetaan luvut $r = 6$ ja $s = -1$ yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + 4s = 2 \\ 2r + 3s = 9 \\ 5s + 5 = 0 \end{cases}$$

kaikkiin yhtälöihin:

$$\begin{array}{ll} r + 4s = 2 & 2r + 3s = 2 \\ 6 + 4 \cdot (-1) = 2 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) = 9 \\ 6 - 4 = 2 & 12 - 3 = 9 \\ 2 = 2 & 9 = 9 \\ \text{tosi} & \text{tosi} \\ \\ 5s + 5 = 0 & \\ 5 \cdot (-1) + 5 = 0 & \\ -5 + 5 = 0 & \\ 0 = 0 & \\ \text{tosi} & \end{array}$$

Koska sijoitetut luvut toteuttavat yhtälöryhmän kaikki yhtälöt, ne toteuttavat myös yhtälöryhmän.

Vastaus a) eivät toteuta b) toteuttavat

2

Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t .

$$\begin{array}{r} + \left\{ \begin{array}{l} 3s - 6t = 2 \\ -3s + t = 3 \end{array} \right. \\ \hline -5t = 5 \quad | : (-5) \\ t = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan $t = -1$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{array}{l} 3s - 6t = 2 \\ 3s - 6 \cdot (-1) = 2 \\ 3s + 6 = 2 \\ 3s = -4 \quad | : 3 \\ s = -\frac{4}{3} \end{array}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -\frac{4}{3}$ ja $t = -1$.

Vastaus $s = -\frac{4}{3}$ ja $t = -1$

3

a) Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{cases} 2r + 5s = 0 & | \cdot 3 \\ 3r + 7s = 1 & | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 6r + 15s = 0 \\ -6r - 14s = -2 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ s = -2$$

Sijoitetaan $s = -2$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r .

$$2r + 5s = 0$$

$$2r + 5 \cdot (-2) = 0$$

$$2r - 10 = 0$$

$$2r = 10 \quad | :2$$

$$r = 5$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = 5$ ja $s = -2$.

b) Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{cases} 2r - 3s = 2 & | \cdot 2 \\ -4r + 2s = -3 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 4r - 6s = 4 \\ -4r + 2s = -3 \end{cases}$$

$$-4s = 1 \quad | : (-4)$$
$$s = -\frac{1}{4}$$

Sijoitetaan $s = -\frac{1}{4}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r .

$$2r - 3s = 2$$
$$2r - 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 2$$
$$2r + \frac{3}{4} = 2$$
$$2r = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \quad | : 2$$
$$r = \frac{5}{8}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = \frac{5}{8}$ ja $s = -\frac{1}{4}$.

Vastaus a) $r = 5$ ja $s = -2$
b) $r = \frac{5}{8}$ ja $s = -\frac{1}{4}$

4

Ratkaistaan muuttujat r ja s yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2r + 1 = 0 \\ 3s - 1 = 0 \\ 4r + 9s = 1 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

$$2r + 1 = 0$$

$$3s - 1 = 0$$

$$2r = -1 \quad | : 2$$

$$3s = 1 \quad | : 3$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

$$s = \frac{1}{3}$$

Sijoitetaan luvut $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$ kolmanteen yhtälöön:

$$4r + 9s = 1$$

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$-2 + 3 = 1$$

$$1 = 1$$

tosi

Siis luvut $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = \frac{1}{3}$

5

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3s - 2t = 10 \\ s + 6t = 0 \\ 2s + 4t = 4 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

Poistetaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3s - 2t = 10 & | \cdot 3 \\ s + 6t = 0 \end{cases} \\ & + \begin{cases} 9s - 6t = 30 \\ s + 6t = 0 \end{cases} \\ & \hline & 10s \quad = 30 \\ & \quad \quad s = 3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = 3$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t .

$$s + 6t = 0$$

$$3 + 6t = 0$$

$$6t = -3$$

$$t = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan luvut $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$ yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön:

$$2s + 4t = 4$$

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$6 - 2 = 4$$

$$4 = 4$$

tosi

Siis luvut $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $s = 3$ ja $t = -\frac{1}{2}$

6

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -s + t = 2 \\ 4s - 3t = 1 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

Poistetaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t .

$$\begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -s + t = 2 \end{cases} \quad | \cdot 3$$
$$+ \begin{cases} 3s - 2t = 1 \\ -3s + 3t = 6 \end{cases}$$

$$t = 7$$

Sijoitetaan $t = 7$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s .

$$-s + t = 2$$

$$-s + 7 = 2$$

$$-s = -5$$

$$s = 5$$

Sijoitetaan luvut $s = 5$ ja $t = 7$ yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön:

$$4s - 3t = 1$$

$$4 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = 1$$

$$20 - 21 = 1$$

$$-1 = 1$$

epätosi

Siis luvut $s = 5$ ja $t = 7$ eivät toteuta yhtälöryhmän viimeistä yhtälöä. Koska muuttujille s ja t ei löydy arvoja, jotka toteuttavat kaikki kolme yhtälöä, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus ei ratkaisua

7

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi t . Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2r + 3s - t = -1 & (1) \\ r - 5s + 2t = 16 & (2) \\ 3r + s + t = 12 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja t .

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 2r + 3s - t = -1 \\ 3r + s + t = 12 \end{cases} \\ \hline 5r + 4s = 11 \end{array}$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja t .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2r + 3s - t = -1 & | \cdot 2 \\ r - 5s + 2t = 16 \end{cases} \\ \\ + \begin{cases} 4r + 6s - 2t = -2 \\ r - 5s + 2t = 16 \end{cases} \\ \hline 5r + s = 14 \end{array}$$

On päädytty yhtälöpariin

$$\begin{cases} 5r + 4s = 11 \\ 5r + s = 14 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja s . Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{cases} 5r + 4s = 11 \\ 5r + s = 14 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 5r + 4s = 11 \\ -5r - s = -14 \end{cases}$$

$$3s = -3$$

$$s = -1$$

Sijoitetaan tulos $s = -1$ äskeisen yhtälöparin jälkimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r .

$$5r + s = 14$$

$$5r - 1 = 14$$

$$5r = 15$$

$$r = 3$$

Sijoitetaan $r = 3$ ja $s = -1$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 3 ja ratkaistaan muuttuja t .

$$3r + s + t = 12$$

$$3 \cdot 3 - 1 + t = 12$$

$$9 - 1 + t = 12$$

$$8 + t = 12$$

$$t = 4$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 3$, $s = -1$ ja $t = 4$.

Vastaus $r = 3$, $s = -1$ ja $t = 4$

8

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi s , koska se puuttuu jo ”valmiiksi” yhtälöryhmän keskimmäisestä yhtälöstä. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2r - 2s + 3t = -3 & (1) \\ 5r + 2t = 1 & (2) \\ 2r - s + t = -1 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja s .

$$\begin{cases} 2r - 2s + 3t = -3 \\ 2r - s + t = -1 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 2r - 2s + 3t = -3 \\ -4r + 2s - 2t = 2 \end{cases}$$

$$-2r + t = -1$$

Yhdistämällä saatu yhtälö ja alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälö 2 päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} 5r + 2t = 1 \\ -2r + t = -1 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja t .

Poistetaan yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja r .

$$\begin{cases} 5r + 2t = 1 \\ -2r + t = -1 \end{cases} \quad | \cdot (-2)$$

$$+ \begin{cases} 5r + 2t = 1 \\ 4r - 2t = 2 \end{cases}$$

$$\hline 9r = 3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Sijoitetaan tulos $r = \frac{1}{3}$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t .

$$5r + 2t = 1$$

$$5 \cdot \frac{1}{3} + 2t = 1$$

$$2t = 1 - \frac{5}{3} = \frac{3}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

Sijoitetaan $r = \frac{1}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 3 ja ratkaistaan muuttuja s .

$$2r - s + t = -1$$

$$2 \cdot \frac{1}{3} - s - \frac{1}{3} = -1$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - s = -1$$

$$-s = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$s = \frac{4}{3}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{4}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$.

Vastaus $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{4}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$

9

Kirjoitetaan yhtälöryhmä ensin muodossa, jossa kaikki muuttujat ovat vasemmalla puolella:

$$\begin{cases} r + s + t = 1 & (1) \\ r - s + 2t = 5 & (2) \\ r + 5s + t = 5 & (3) \end{cases}$$

Muodostetaan yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{cases} r + s + t = 1 & | \cdot (-1) \\ r + 5s + t = 5 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} -r - s - t = -1 \\ r + 5s + t = 5 \end{cases}$$

$$4s = 4$$
$$s = 1$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja r .

$$\begin{cases} r + s + t = 1 \\ r - s + 2t = 5 & | \cdot (-1) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} r + s + t = 1 \\ -r + s - 2t = -5 \end{cases}$$

$$2s - t = -4$$

Sijoitetaan tulos $s = 1$ saatuun yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t .

$$2s - t = -4$$

$$2 \cdot 1 - t = -4$$

$$-t = -6$$

$$t = 6$$

Sijoitetaan $s = 1$ ja $t = 6$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja r .

$$r + s + t = 1$$

$$r + 1 + 6 = 1$$

$$r + 7 = 1$$

$$r = -6$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = -6$, $s = 1$ ja $t = 6$.

Vastaus $r = -6$, $s = 1$ ja $t = 6$

10

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 21r + 71s - 83t = 20 \\ 51r + 17s = -153 \\ 8r + s - 25t = 1 \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -3$, $s = 0$ ja $t = -1$.

Vastaus $r = -3$, $s = 0$ ja $t = -1$

11

a) Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r .

$$\begin{cases} 2r + s = 0 & | \cdot 5 \\ 6r - 5s = -8 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 10r + 5s = 0 \\ 6r - 5s = -8 \end{cases}$$

$$16r = -8$$

$$r = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $r = -\frac{1}{2}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s .

$$2r + s = 0$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + s = 0$$

$$-1 + s = 0$$

$$s = 1$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = 1$.

b) Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r .

$$\begin{cases} 3r + s - 2 = 0 & | \cdot (-2) \\ 5r + 2s - 1 = 0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -6r - 2s + 4 = 0 \\ 5r + 2s - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\hline -r \quad + 3 = 0$$

$$-r = -3$$

$$r = 3$$

Sijoitetaan $r = 3$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s .

$$3r + s - 2 = 0$$

$$3 \cdot 3 + s - 2 = 0$$

$$9 + s - 2 = 0$$

$$s = -7$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = 3$ ja $s = -7$.

HUOM. b-kohdan yhtälöpari voitaisiin ensin muuttaa muotoon, jossa vakiotermit ovat oikealla, mutta tämä ei ole välttämätöntä.

Vastaus a) $r = -\frac{1}{2}$ ja $s = 1$

b) $r = 3$ ja $s = -7$

12

Kirjoitetaan yhtälöpari ensin muodossa, jossa kaikki muuttujat ovat vasemmalla puolella:

$$\begin{cases} 6s - 2t = 4 \\ 5s + 7t = 2 \end{cases}$$

Poistetaan yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{cases} 6s - 2t = 4 & | \cdot 7 \\ 5s + 7t = 2 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 42s - 14t = 28 \\ 10s + 14t = 4 \end{cases}$$

$$52s \quad = 32$$

$$s = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}$$

Sijoitetaan tulos $s = \frac{8}{13}$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t .

$$5s + 7t = 2$$

$$5 \cdot \left(\frac{8}{13}\right) + 7t = 2$$

$$\frac{40}{13} + 7t = 2$$

$$7t = 2 - \frac{40}{13} = \frac{26}{13} - \frac{40}{13} = -\frac{14}{13}$$

$$t = -\frac{2}{13}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \frac{8}{13}$ ja $t = -\frac{2}{13}$.

Vastaus $s = \frac{8}{13}$ ja $t = -\frac{2}{13}$

13

Ratkaistaan muuttujat r ja s yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + 2s = 4 \\ -3r + s = 2 \\ r + 4s = 9 \end{cases}$$

ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös keskimmäisen yhtälön.

Poistetaan ensimmäisen ja viimeisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja s .

$$\begin{cases} r + 2s = 4 & | \cdot (-1) \\ r + 4s = 9 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -r - 2s = -4 \\ r + 4s = 9 \end{cases}$$

$$2s = 5$$

$$s = \frac{5}{2}$$

Sijoitetaan $s = \frac{5}{2}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r .

$$r + 2s = 4$$

$$r + 2 \cdot \frac{5}{2} = 4$$

$$r + 5 = 4$$

$$r = -1$$

Sijoitetaan luvut $r = -1$ ja $s = \frac{5}{2}$ yhtälöryhmän keskimmäiseen yhtälöön:

$$-3r + s = 2$$

$$-3 \cdot (-1) + \frac{5}{2} = 2$$

$$3 + \frac{5}{2} = 2$$

$$\frac{6}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$\frac{11}{2} = 2$$

epätosi

Siis luvut $r = -1$ ja $s = \frac{5}{2}$ eivät toteuta yhtälöryhmän keskimmäistä yhtälöä. Koska muuttujille r ja s ei löydy arvoja, jotka toteuttavat kaikki kolme yhtälöä, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus ei ratkaisua

14

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2s - 2t = 5 \\ 4s + 3t = 3 \\ 2s - t = 4 \end{cases}$$

ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös keskimmäisen yhtälön.

Poistetaan ensimmäisen ja viimeisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2s - 2t = 5 & | \cdot (-1) \\ 2s - t = 4 \end{cases} \\ + \begin{cases} -2s + 2t = -5 \\ 2s - t = 4 \end{cases} \\ \hline t = -1 \end{array}$$

Sijoitetaan $t = -1$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s .

$$2s - t = 4$$

$$2s - (-1) = 4$$

$$2s + 1 = 4$$

$$2s = 3$$

$$s = \frac{3}{2}$$

Sijoitetaan luvut $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$ yhtälöryhmän keskeiseen yhtälöön:

$$4s + 3t = 3$$

$$4 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot (-1) = 3$$

$$6 - 3 = 3$$

$$3 = 3$$

tosi

Siis luvut $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $s = \frac{3}{2}$ ja $t = -1$

15

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi r . Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 & (1) \\ r - 4s - 2t = 2 & (2) \\ 3r - 6s - 4t = 3 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja r .

$$\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ 3r - 6s - 4t = 3 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ -3r + 6s + 4t = -3 \end{cases}$$

$$12s + 5t = -5$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja r .

$$\begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ r - 4s - 2t = 2 \quad | \cdot (-3) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 3r + 6s + t = -2 \\ -3r + 12s + 6t = -6 \end{cases}$$

$$18s + 7t = -8$$

On päädytty yhtälöpariin

$$\begin{cases} 12s + 5t = -5 \\ 18s + 7t = -8 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat s ja t . Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja t .

$$\begin{cases} 12s + 5t = -5 & | \cdot 3 \\ 18s + 7t = -8 & | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 36s + 15t = -15 \\ -36s - 14t = 16 \end{cases}$$

$$t = 1$$

Sijoitetaan tulos $t = 1$ äskeisen yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s .

$$12s + 5t = -5$$

$$12s + 5 \cdot 1 = -5$$

$$12s + 5 = -5$$

$$12s = -10$$

$$s = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Sijoitetaan $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja r .

$$3r + 6s + t = -2$$

$$3r + 6 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + 1 = -2$$

$$3r - 5 + 1 = -2$$

$$3r - 4 = -2$$

$$3r = 2$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$.

Vastaus $r = \frac{2}{3}$, $s = -\frac{5}{6}$ ja $t = 1$

16

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 5r - 3s + 10t = 6 & (1) \\ s - 5t = 1 & (2) \\ r - 2t = 2 & (3) \end{cases}$$

sijoitusmenetelmällä. Ratkaistaan yhtälöstä 2 muuttuja s ja yhtälöstä 3 muuttuja r :

$$s = 5t + 1$$

$$r = 2t + 2$$

Sijoitetaan tulokset yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja t :

$$5r - 3s + 10t = 6$$

$$5 \cdot (2t + 2) - 3 \cdot (5t + 1) + 10t = 6$$

$$10t + 10 - 15t - 3 + 10t = 6$$

$$5t + 7 = 6$$

$$5t = -1$$

$$t = -\frac{1}{5}$$

Sijoitetaan tulos $t = -\frac{1}{5}$ yhtälöihin $r = 2t + 2$ ja $s = 5t + 1$ ja ratkaistaan muuttujat r ja s :

$$r = 2t + 2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 = -\frac{2}{5} + 2 = -\frac{2}{5} + \frac{10}{5} = \frac{8}{5}$$

$$s = 5t + 1 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \frac{8}{5}$, $s = 0$ ja $t = -\frac{1}{5}$.

Vastaus $r = \frac{8}{5}$, $s = 0$ ja $t = -\frac{1}{5}$

17

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi s , koska se puuttuu jo ”valmiiksi” yhtälöryhmän ensimmäisestä yhtälöstä. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + t = 1 & (1) \\ 2r + 5s - t = 2 & (2) \\ 5r + s + 4t = 3 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 2 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja s .

$$\begin{cases} 2r + 5s - t = 2 \\ 5r + s + 4t = 3 \end{cases} \quad | \cdot (-5)$$

$$+ \begin{cases} 2r + 5s - t = 2 \\ -25r - 5s - 20t = -15 \end{cases}$$

$$-23r \quad -21t = -13$$

Yhdistämällä saatu yhtälö ja alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälö 1 päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} r + t = 1 \\ -23r - 21t = -13 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja t .

Poistetaan yhtälöparista muuttuja r ja ratkaistaan muuttuja t .

$$\begin{cases} r + t = 1 & | \cdot 23 \\ -23r - 21t = -13 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 23r + 23t = 23 \\ -23r - 21t = -13 \end{cases}$$

$$2t = 10$$

$$t = 5$$

Sijoitetaan tulos $t = 5$ yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja r .

$$r + t = 1$$

$$r + 5 = 1$$

$$r = 1 - 5 = -4$$

Sijoitetaan $r = -4$ ja $t = 5$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 3 ja ratkaistaan muuttuja s .

$$5r + s + 4t = 3$$

$$5 \cdot (-4) + s + 4 \cdot 5 = 3$$

$$-20 + s + 20 = 3$$

$$s = 3$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = -4$, $s = 3$ ja $t = 5$.

Vastaus $r = -4$, $s = 3$ ja $t = 5$

18

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + s = -1 & (1) \\ r + 5s = 3 & (2) \\ r + t = t - 2 & (3) \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimesta riippuen esimerkiksi $r = -2$, $s = 1$ ja $t = t$, missä viimeinen yhtälö tarkoittaa, että muuttujan t arvo voi olla mikä tahansa (reaali)luku.

Tulos voidaan ymmärtää seuraavasti:

Yhtälöryhmän yhtälöstä 3 muuttuja t supistuu molemmilta puolilta pois, jolloin saadaan suoraan $r = -2$. Sijoittamalla tämä tulos esimerkiksi yhtälöryhmän yhtälöön 1 saadaan muuttujaksi s

$$r + s = -1$$

$$-2 + s = -1$$

$$s = 1$$

Sama tulos saataisiin myös yhtälöryhmän yhtälöstä 2. On siis saatu $r = -2$ ja $s = 1$. Toisaalta yhtälöryhmän yhtälöstä 3 nähdään, että yhtälö toteutuu saapa muuttuja t minkä arvon tahansa.

Vastaus $r = -2$, $s = 1$ ja t on mikä tahansa reaaliluku

19

a) Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r + s = 2t & (1) \\ r - s = 2 & (2) \\ r - t = 1 & (3) \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimesta riippuen esimerkiksi $r = t + 1$, $s = t - 1$ ja $t = t$, missä viimeinen yhtälö tarkoittaa, että muuttujan t arvo voi olla mikä tahansa (reaali)luku.

Tulos voidaan ymmärtää seuraavasti:

Yhtälöryhmän yhtälöstä 3 saadaan ratkaistua muuttuja r muuttujan t avulla: $r = t + 1$. Vastaavasti yhtälöstä 2 saadaan muuttujalle s

$$r - s = 2$$

$$-s = 2 - r$$

$$s = -2 + r = -2 + t + 1 = t - 1$$

Sijoittamalla nämä lausekkeet yhtälöryhmän yhtälöön 1 saadaan

$$r + s = 2t$$

$$t + 1 + t - 1 = 2t$$

$$2t = 2t \quad (\text{tosi})$$

Tulos tarkoittaa, että t voi olla mikä tahansa reaaliluku ja $r = t + 1$ ja $s = t - 1$.

b) Yhtälöparin

$$\begin{cases} r - s + 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

ratkaisuksi saadaan laskimesta riippuen esimerkiksi $r = 3$, $s = 5t + 3$ ja $t = t$, missä viimeinen yhtälö tarkoittaa, että muuttujan t arvo voi olla mikä tahansa (reaali)luku.

Tulos voidaan ymmärtää seuraavasti:

Ratkaistaan yhtälöparista muuttuja r .

$$+ \begin{cases} r - s + 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

$$\hline 2r \quad = 6$$

$$r = 3$$

Toisaalta poistamalla yhtälöparista muuttuja r saadaan

$$\begin{cases} r - s + 5t = 0 & | \cdot (-1) \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -r + s - 5t = 0 \\ r + s - 5t = 6 \end{cases}$$

$$\hline 2s - 10t = 6$$

$$2s = 10t + 6$$

$$s = 5t + 3$$

Tulos tarkoittaa, että t voi olla mikä tahansa reaaliluku ja $s = 5t + 3$ (ja $r = 3$).

Vastaus a) $r = t + 1$, $s = t - 1$ ja t on mikä tahansa reaaliluku
b) $r = 3$, $s = 5t + 3$ ja t on mikä tahansa reaaliluku