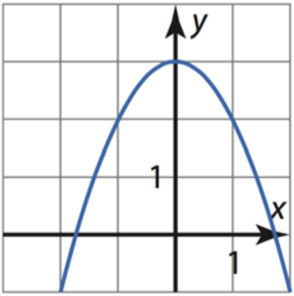
170

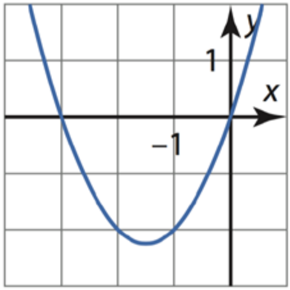
Funktion $f(x) = -x^2 + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

c)



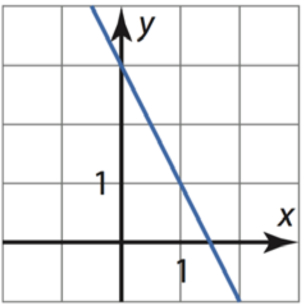
Funktion $g(x) = x^2 + 3x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

a)



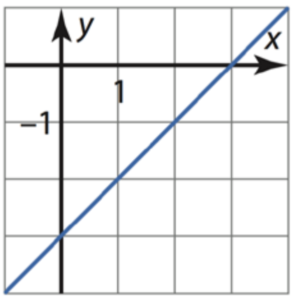
Funktion $h(x) = -2x + 3$ kuvaaja on laskeva suora.

d)



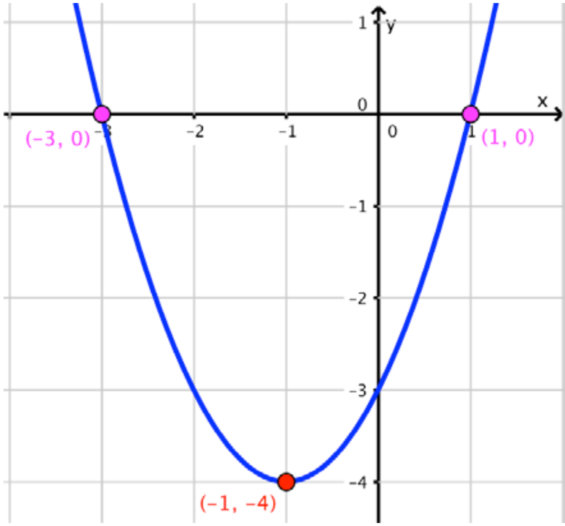
Funktion $i(x) = x - 3$ kuvaaja on nouseva suora.

b)



Vastaus: a) $g(x)$ b) $i(x)$ c) $f(x)$ d) $h(x)$

171

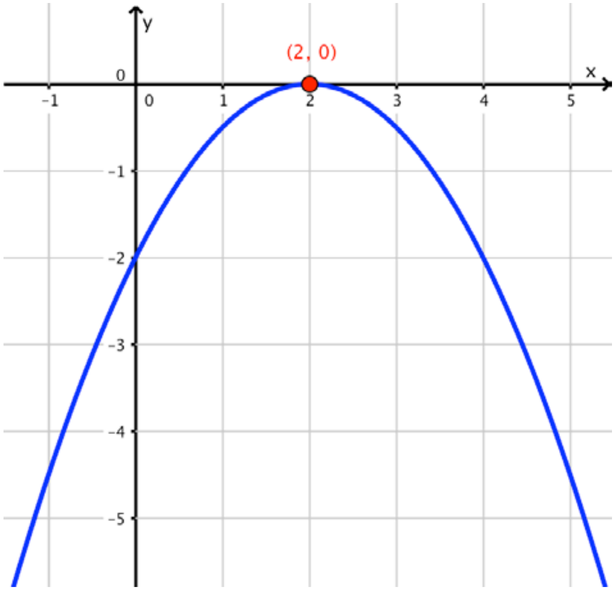


a) Huippu on pisteessä (–1, –4)

b) Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin pisteissä (–3, 0) ja (1, 0).
Siten yhtälöllä $x^2 + 2x - 3 = 0$ on kaksi juurta, jotka ovat $x = –3$ ja $x = 1$.

Vastaus: a) (–1, –4) b) kaksi juurta, $x = –3$ ja $x = 1$

172

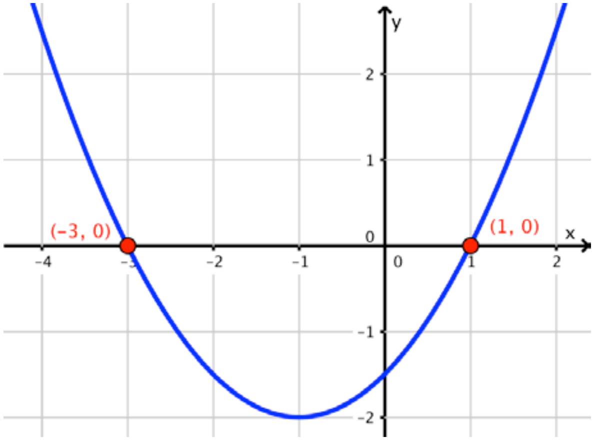


a) Huippu on pisteessä (2, 0)

b) Funktion kuvaaja sivuaa x-akselia pisteessä (2, 0). Siten yhtälöllä $x^2 + 2x - 3 = 0$ vain yksi juuri, joka on $x = 2$.

Vastaus: a) (2, 0) b) yksi juuri, $x = 2$

173



a) Funktion arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Funktion g arvot ovat negatiivisia, kun $-3 < x < 1$.

b) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

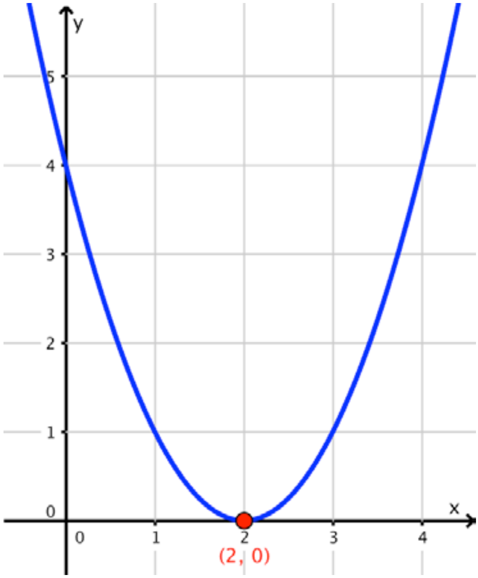
Funktion g arvot ovat positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 1$.

c) Funktion arvo on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen yläpuolella.

Funktion g arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \leq -3$ tai $x \geq 1$.

Vastaus: a) $-3 < x < 1$
b) $x < -3$ tai $x > 1$
c) $x \leq -3$ tai $x \geq 1$

174



a) Funktion arvo on nolla kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä

Funktion g arvo on nolla, kun $x = 2$.

b) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

Funktion g arvot ovat positiivisia, kun $x \neq 2$.

c) Funktion arvo on negatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin alapuolella.

Funktion g arvo ei ole negatiivinen millään muuttujan x arvolla.

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x \neq 2$ c) ei millään muuttujan arvolla

175

Funktion $f(x) = -x^2 + c$ nollakohdat ovat yhtälön $-x^2 + c = 0$ ratkaisut. Sievennetään yhtälöä.

$$-x^2 + c = 0$$

$$c = x^2$$

$$x^2 = c$$

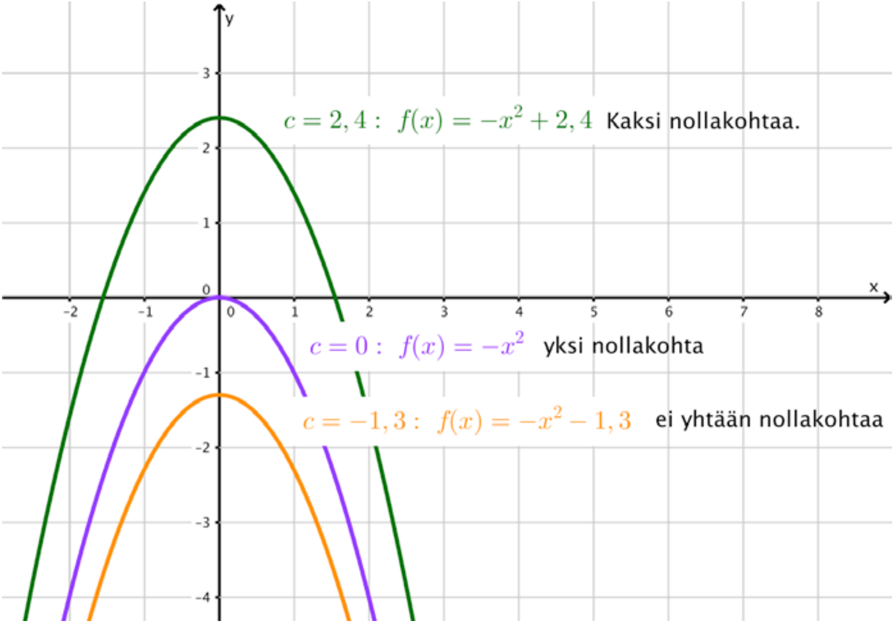
a) Yhtälöllä $x^2 = c$ on kaksi ratkaisua ($x = \sqrt{c}$ ja $x = -\sqrt{c}$), kun $c > 0$. Voidaan valita esimerkiksi $c = 2{,}4$.

b) Yhtälöllä $x^2 = c$ on yksi ratkaisu, kun $c = 0$.

c) Yhtälöllä $x^2 = c$ ei ole yhtään ratkaisua, kun $c < 0$. Voidaan valita esimerkiksi $c = –1{,}3$.

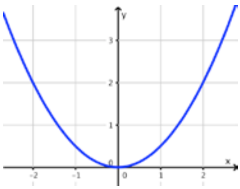
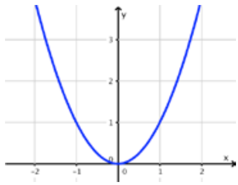
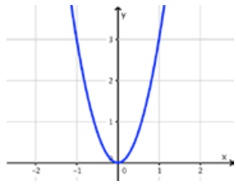
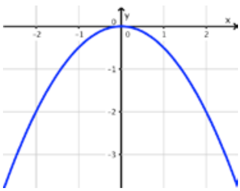
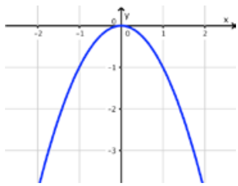
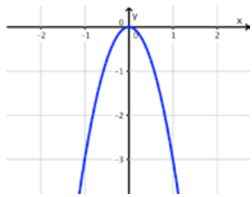
Vastaus: a) $c > 0$, esimerkiksi $c = 2{,}4$
b) $c = 0$
c) $c < 0$, esimerkiksi $c = –1{,}3$

Ratkaisun voi tarkistaa piirtämällä valittuja c:n arvoja vastaavien funktioiden kuvaajat.



176

a) Piirretään paraabelin $y = ax^2$ kuvaajia parametrin a eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille a.)

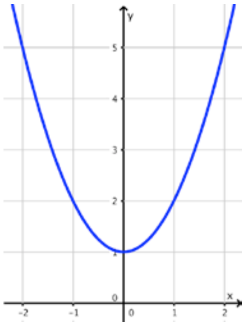
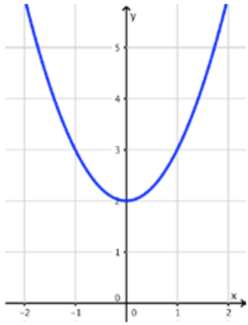
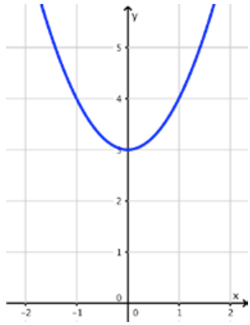
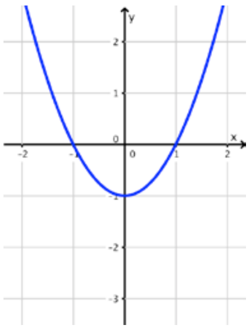
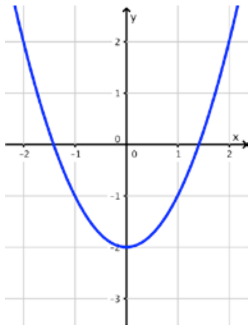
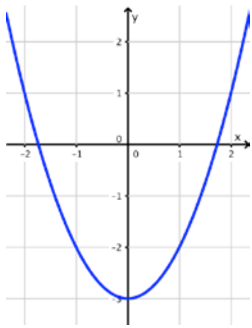
$a = 0{,}5$ 	$a = 1$ 	$a = 3$ 
$a = –0{,}5$ 	$a = –1$ 	$a = –3$ 

Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi on parametrin a itseisarvo.

Kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.

Kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

b) Piirretään paraabelin $y = x^2 + c$ kuvaajia parametrin c eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille *c*.)

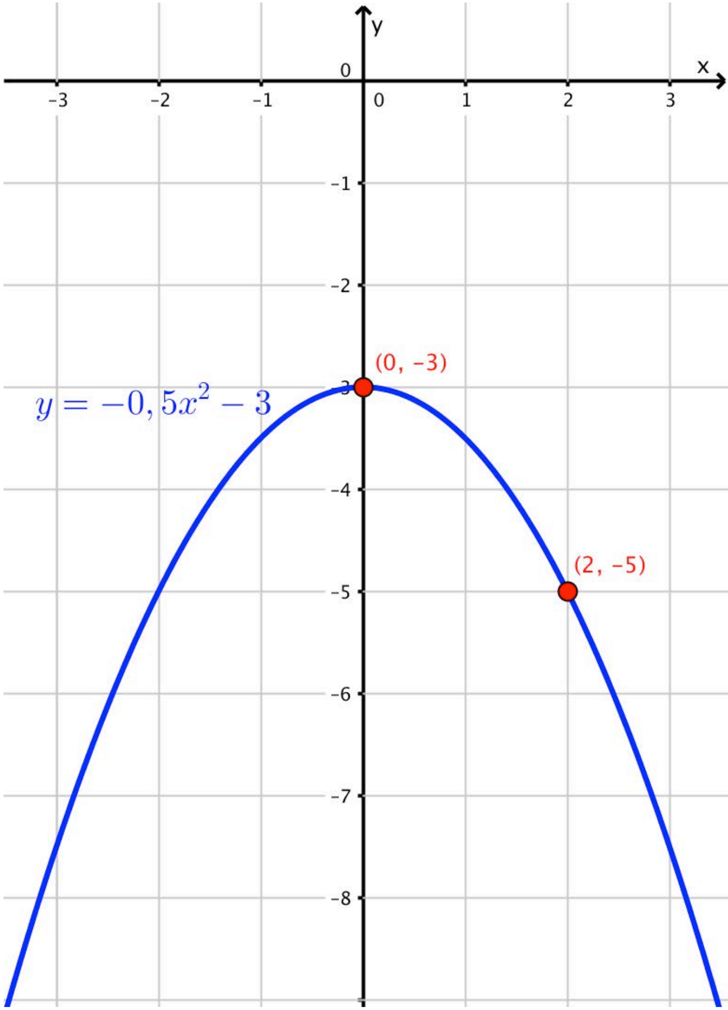
$c = 1$ 	$c = 2$ 	$c = 3$ 
$c = –1$ 	$c = –2$ 	$c = –3$ 

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, c)$.

Kun parametrin c arvo kasvaa, niin paraabeli nousee ylöspäin.

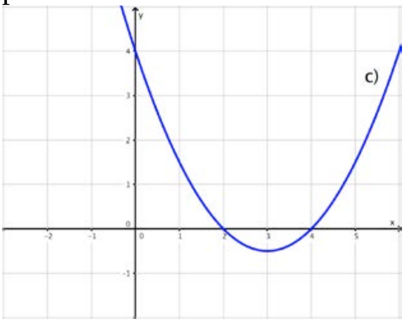
c) Geometriaohjelmalla tutkimalla kuvaajia parametrien *a* ja *c* arvoilla havaitaan, että a- ja b-kohtien havainnot ovat voimassa.

d) Piirtämällä havaitaan, että $a = –0,5$ ja $c = –3$.



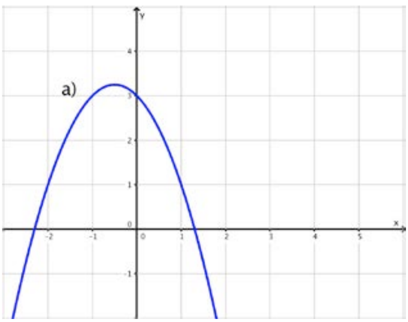
177

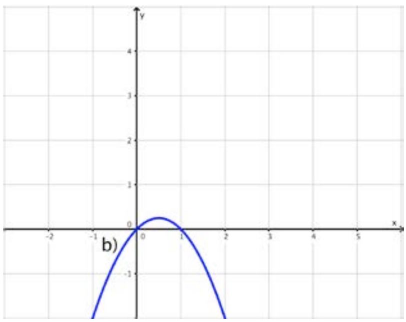
Funktion $h(x)=0,5x^2-3x+4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $f(x)=-x^2-x+3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Koska $f(0) = 3$, kuvaaja kulkee pisteen (0, 3) kautta.

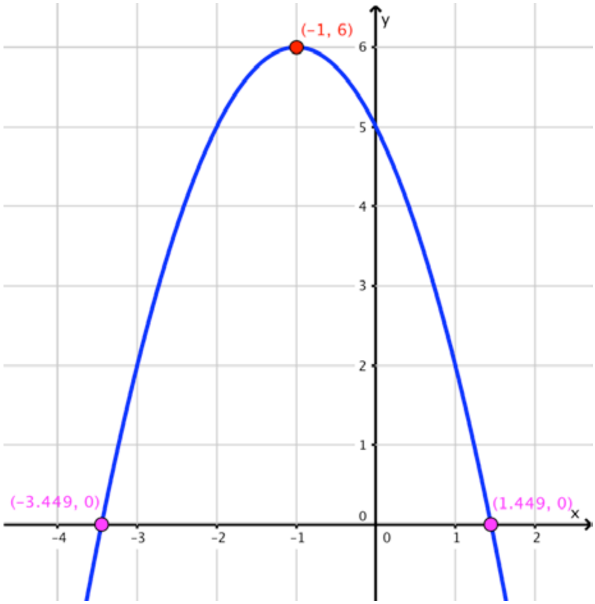
Funktion $g(x)=x-x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Koska $g(0) = 0$, kuvaaja kulkee origon kautta.





Vastaus: a) $f(x)$ b) $g(x)$ c) $h(x)$

178

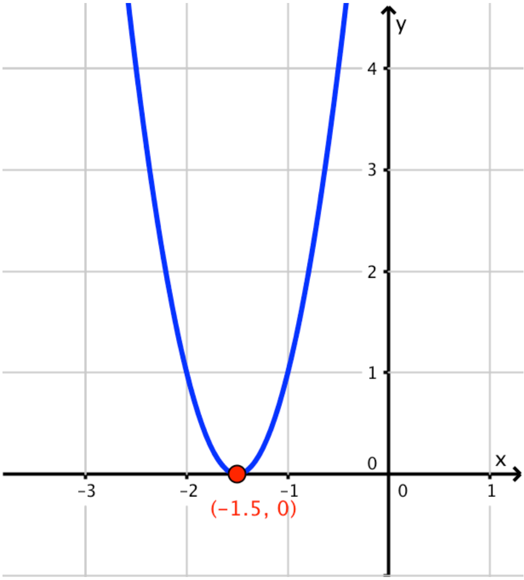


a) Huippu on pisteessä (–1, 6)

b) Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin likimain pisteissä (–3,4; 0) ja (1,4; 0). Siten yhtälöllä $-x^2-2x+5=0$ on kaksi juurta, jotka ovat $x \approx -3{,}4$ ja $x \approx 1{,}4$.

Vastaus: a) (–1, 6) b) kaksi juurta, $x \approx -3{,}4$ ja $x \approx 1{,}4$

179



a) Funktion arvo on positiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

Funktion f arvo on positiivinen, kun $x \neq -1{,}5$.

b) Funktion arvo on epänegatiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen yläpuolella.

Funktion f arvo on epänegatiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla.

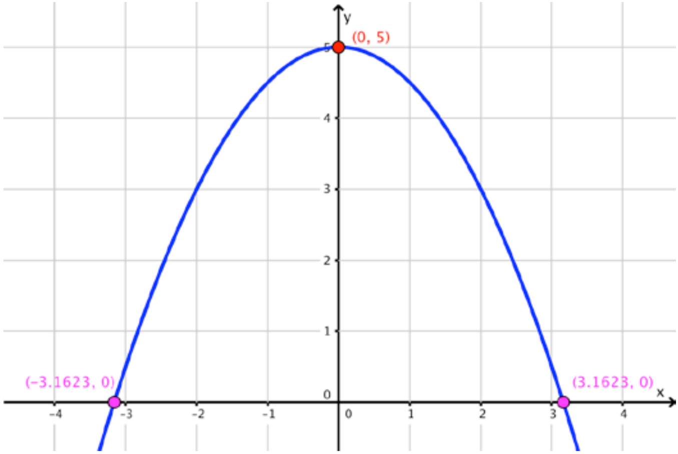
c) Funktion arvo on epäpositiivinen niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on x-akselilla tai sen alapuolella.

Funktion f arvo on epäpositiivinen, kun $x = -1{,}5$.

Vastaus: a) $x \neq -1{,}5$ b) kaikilla muuttujan arvoilla c) $x = -1{,}5$

180

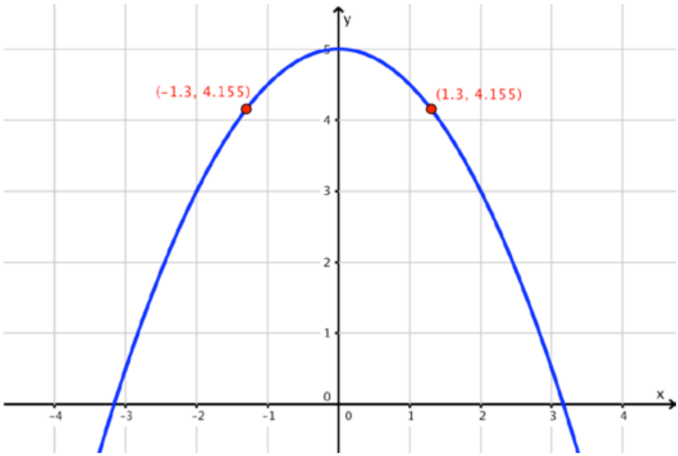
a)



Tunnelin korkeus nähdään huipun koordinaateista eli korkeus on 5,0 m.

Tunnelin leveys on nollakohtien välinen etäisyys eli $2\cdot 3{,}1623 = 6{,}3246 \approx 6{,}3\ (\mathrm{m})$.

b) Oletetaan, että kuorma-auto voi ajaa sillan ali tien keskilinjaa pitkin. Koska auton leveys on 2,60 m se ulottuu 1,30 m keskilinjan kummallekin puolelle. Selvitetään kuvaajan avulla kuinka korkea tunneli on 1,30 m keskilinjan oikealla (vasemmalla) puolella.



Koska 1,30 m keskilinjasta sivussa tunnelin korkeus on likimain 4,155 m mahtuu 4,00 m korkea kuorma-auto ajamaan tunnelin läpi.

Vastaus: a) korkeus 5,0 m, leveys 6,3 m

b) mahtuu

181

a) $x^2 = 25$

$x = \sqrt{25}$ tai $x = -\sqrt{25}$

$x = 5$ $x = -5$

b) $(x-3)^2 = 25$

$x - 3 = \sqrt{25}$ tai $x - 3 = -\sqrt{25}$

$x - 3 = 5$ $x - 3 = -5$

$x = 5 + 8 = 8$ $x = -5 + 3 = -2$

c) $(x+4)^2 = 25$

$x + 4 = \sqrt{25}$ tai $x + 4 = -\sqrt{25}$

$x + 4 = 5$ $x + 4 = -5$

$x = 5 - 4 = 1$ $x = -5 - 4 = -9$

Vastaus: a) $x = –5$ tai $x = 5$
b) $x = –2$ tai $x = 8$
c) $x = –9$ tai $x = 1$

182

a) $(3x-1)^2 = 0$

$$3x-1=0$$

$$3x=1$$

$$x=\frac{1}{3}$$

b) $(3x-1)^2 = 4$

$3x-1=\sqrt{4}$ tai $3x-1=-\sqrt{4}$

$3x-1=2$ $\quad$ $3x-1=-2$

$3x=3$ $\quad$ $3x=-1$

$x=1$ $\quad$ $x=-\frac{1}{3}$

c) $(3x-1)^2 = -4$

Koska minkään luvun neliö ei ole negatiivinen, yhtälöä ei toteuta mikään luku.

Vastaus: a) $x=\frac{1}{3}$ b) $x=-\frac{1}{3}$ tai $x=1$ c) ei juuria

183

Sievennetään yhtälöä.

$$8x^2 + c = 15$$

$$8x^2 = 15 - c$$

$$x^2 = \frac{15-c}{8}$$

Yhtälön oikean puolen merkin määrää osoittaja $15 - c$.

a) Yhtälöllä $x^2 = \frac{15-c}{8}$ on kaksi juurta, kun yhtälön oikea puoli on positiivinen eli

$$15 - c > 0$$

$$15 > c$$

$$c < 15.$$

Voidaan valita esimerkiksi $c = 10$.

b) Yhtälöllä $x^2 = \frac{15-c}{8}$ on yksi juuri, kun yhtälön oikealla puolella on luku 0.

$$\frac{15-c}{8} = 0$$

$$15 - c = 0$$

$$c = 15$$

c) Yhtälöllä $x^2 = \dfrac{15-c}{8}$ ei ole yhtään juurta, kun yhtälön oikea puoli on negatiivinen eli

$$15 - c < 0$$

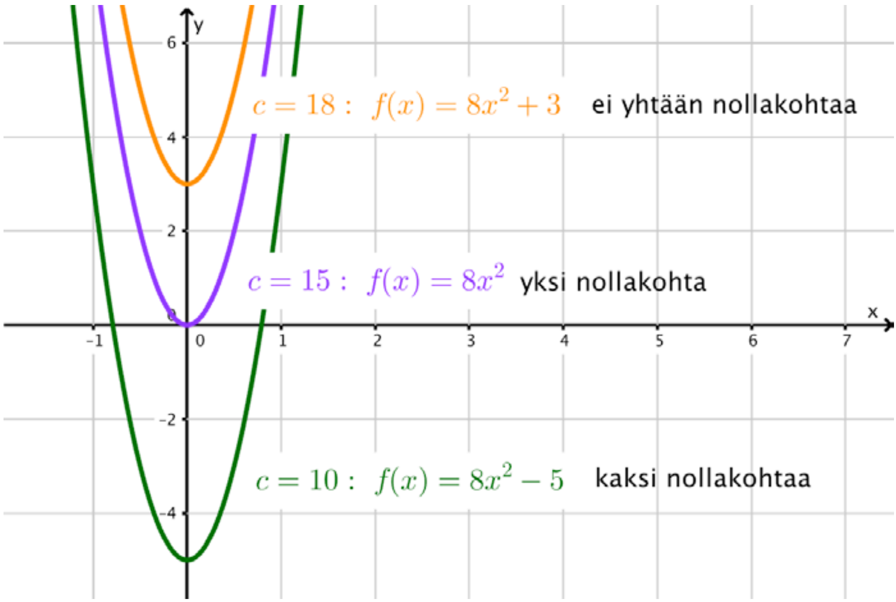
$$15 < c$$

$$c > 15.$$

Voidaan valita esimerkiksi $c = 18$.

Vastaus: a) $c < 15$, esimerkiksi $c = 10$
b) $c = 15$
c) $c > 15$, esimerkiksi $c = 18$

Yhtälön $8x^2 + c = 15$ eli $8x^2 + c - 15 = 0$ ratkaisut ovat funktion $f(x) = 8x^2 + c - 15$ nollakohtia. Tehtävä voidaan siis tarkistaa piirtämällä valittuja c:n arvoja vastaavien funktioiden kuvaajat.



184

Funktioiden f ja g arvot ovat yhtä suuret vain yhdessä kohdassa, kun yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on vain yksi ratkaisu. Muodostetaan ja sievennetään yhtälö.

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-3)^2 = -6x + k$$

$$x^2 - 6x + 9 = -6x + k$$

$$x^2 + 9 = k$$

$$x^2 = k - 9$$

Yhtälöllä $x^2 = k - 9$ on vain yksi ratkaisu, kun

$$k - 9 = 0$$

$$k = 9.$$

Kun $k = 9$ on yhtälön ratkaisu

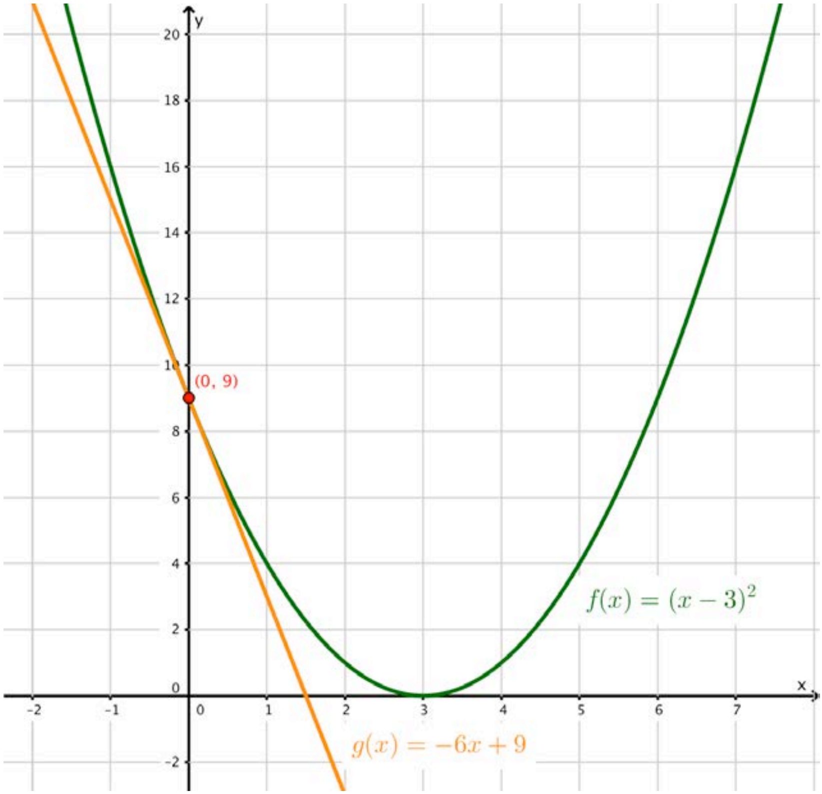
$$x^2 = 9 - 9$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0.$$

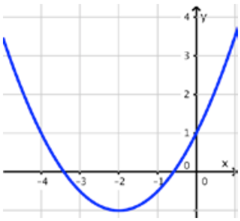
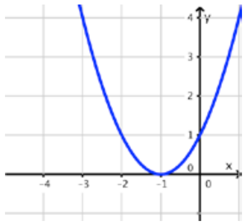
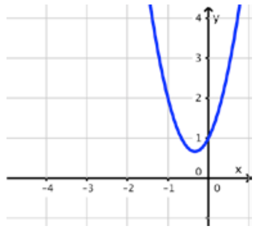
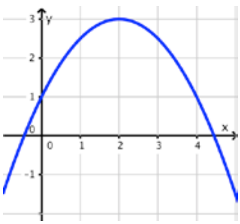
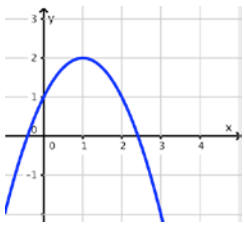
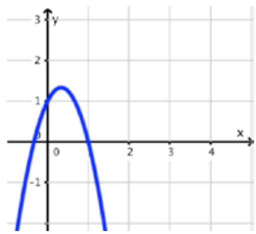
Vastaus: $k = 9$, kohta on $x = 0$

Tehtävän voi tarkistaa piirtämällä funktioiden kuvaajat. Koska kuvaajilla on vain yksi leikkauspiste on *k*:n arvo oikea.



185

a) Piirretään paraabelin $y = ax^2 + 2x + 1$ kuvaajia parametrin a eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille a.)

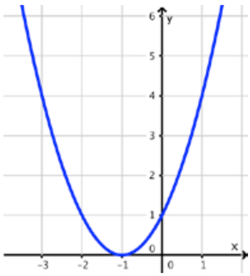
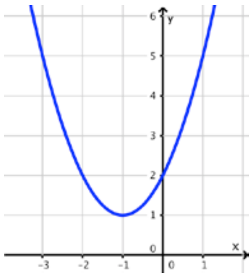
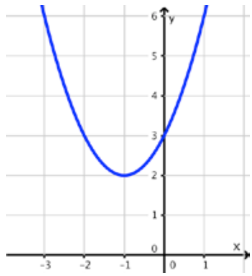
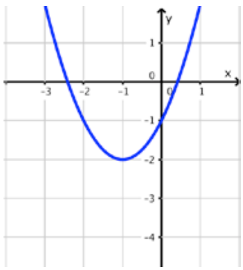
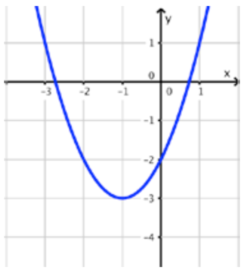
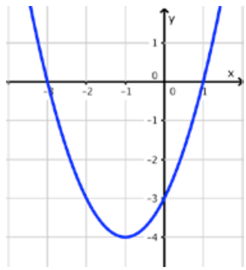
a = 0,5 	a = 1 	a = 3 
a = –0,5 	a = –1 	a = –3 

Paraabeli on sitä kapeampi, mitä suurempi on parametrin a itseisarvo.

Kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin.

Kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

b) Piirretään paraabelin $y = x^2 + 2x + c$ kuvaajia parametrin c eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille *c*.)

$c = 1$ 	$c = 2$ 	$c = 3$ 
$c = -1$ 	$c = -2$ 	$c = -3$ 

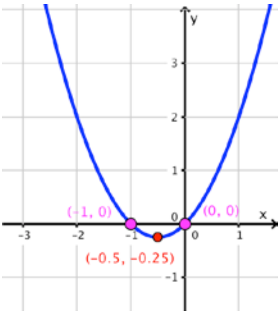
Paraabeli leikkaa *y*-akselin pisteessä $(0, c)$.

Kun parametrin c arvo kasvaa, niin paraabeli nousee ylöspäin.

c) Piirretään paraabelin $y = x^2 + bx$ kuvaajia parametrin b eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäädintä parametrille b.)

<table>
<tr>
<td>

$b = 1$

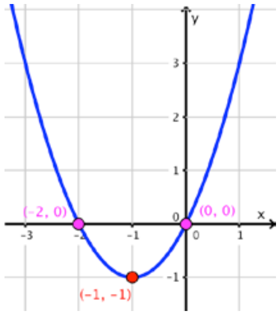


Nollakohdat: –1 ja 0

Huipun x-koordinaatti: $-\dfrac{1}{2}$

</td>
<td>

$b = 2$

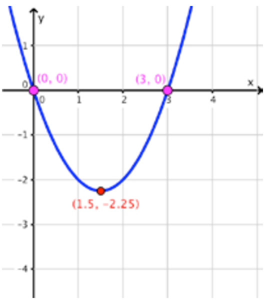


Nollakohdat: –2 ja 0

Huipun x-koordinaatti: –1

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$b = -3$



Nollakohdat: 0 ja 3

Huipun x-koordinaatti: $\dfrac{3}{2}$

</td>
<td>

$b = -4$

Nollakohdat: 0 ja 4

Huipun x-koordinaatti: 2

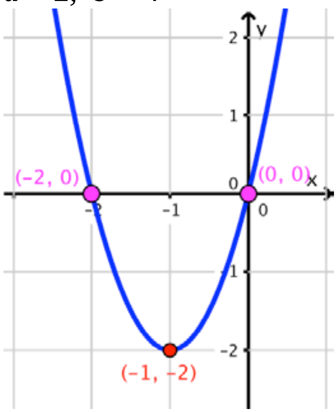
</td>
</tr>
</table>

Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -b$. Huippu on kohdassa $x = -\dfrac{b}{2}$.

d) Piirretään paraabelin $y = ax^2 + bx$ kuvaajia parametrien a ja b eri arvoilla. (Geometriaohjelmassa voit käyttää myös liukusäätimiä parametreille a ja b.)

<table>
<tr>
<td>

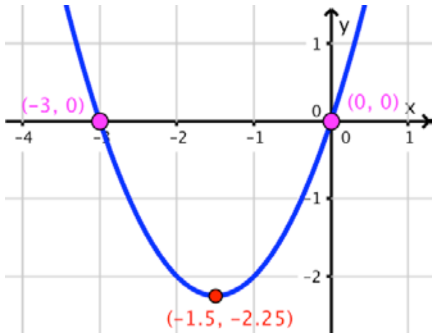
$a = 2$, $b = 4$



Nollakohdat: -2 ja 0
Huipun x-koordinaatti: -1

</td>
<td>

$a = 1$, $b = 3$



Nollakohdat: -3 ja 0
Huipun x-koordinaatti: $-\dfrac{3}{2}$

</td>
</tr>
</table>

Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -\dfrac{b}{a}$.

Huippu on kohdassa $x = -\dfrac{b}{2a}$.

186

a) $x^2-4x+3=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad a=1,\ \ b=-4,\ \ c=3$$

$$=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}$$

$$x=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{tai} \quad x=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

b) $5x^2+x-4=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad a=5,\ \ b=1,\ \ c=-4$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 5\cdot(-4)}}{2\cdot 5}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{10}=\frac{-1\pm 9}{10}$$

$$x=\frac{-1+9}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5} \quad \text{tai} \quad x=\frac{-1-9}{10}=\frac{-10}{10}=-1$$

Vastaus: a) $x=1$ tai $x=3$ b) $x=-1$ tai $x=\frac{4}{5}$

187

a) $x^2 + 3 = 5x$

$x^2 - 5x + 3 = 0$ $a = 1,\ \ b = -5,\ \ c = 3$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \text{ tai } x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

b) $3x^2 + 2x = -1$

$3x^2 + 2x + 1 = 0$ $a = 3,\ \ b = 2,\ \ c = 1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-10}}{6}$$

Koska lukua $\sqrt{-10}$ ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole juuria.

Vastaus: a) $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ tai $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ b) ei juuria

188

a) $x^2 + 9x = 0$ $\quad\quad$ $a = 1,\ \ b = 9,\ \ c = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1} = \frac{-9\pm9}{2}$$

$$x = \frac{-9+9}{2} = \frac{0}{2} = 0 \ \text{ tai } \ x = \frac{-9-9}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

b) $4y^2 - 5y + 1 = 1$

$4y^2 - 5y = 0$ $\quad\quad$ $a = 4,\ \ b = -5,\ \ c = 0$

$$y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot4\cdot0}}{2\cdot4} = \frac{5\pm5}{8}$$

$$y = \frac{5+5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \ \text{ tai } \ y = \frac{5-5}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

Vastaus: a) $x = -9$ tai $x = 0$ $\quad$ b) $y = 0$ tai $y = \frac{5}{4}$

189

a) $$(x+3)^2 = 12x$$

$$x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 = 12x$$

$$x^2 + 6x - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad a = 1,\ \ b = -6,\ \ c = 9$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

b) $$(x+2)(x-2) = 3x$$

$$x^2 - 2^2 = 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad a = 1,\ \ b = -3,\ \ c = -4$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot (-4)}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vastaus: a) $x = 3$ b) $x = -1$ tai $x = 4$

190

a) Funktion $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ nollakohdat ovat yhtälön $-3x^2 - 2x + 1 = 0$ juuret.

$$-3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \qquad a = 3, \ b = 2, \ c = -1$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

b) Funktion $g(x) = 7x^2 - 56$ nollakohdat ovat yhtälön $7x^2 - 56 = 0$ juuret.

$$7x^2 - 56 = 0$$

$$7x^2 = 56 \quad \Big| : 7$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \sqrt{8} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 2} \qquad x = -\sqrt{4 \cdot 2}$$

$$x = 2\sqrt{2} \qquad x = -2\sqrt{2}$$

Vastaus: a) $x = -1$ tai $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -2\sqrt{2}$ tai $x = 2\sqrt{2}$

191

a) $(x+1)^2 = 5$

$$x^2 + 2x + 1 = 5$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \qquad\qquad a = 1,\;\; b = 2,\;\; c = -4$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(-1 \pm \sqrt{5})}{\cancel{2}} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = -1 + \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = -1 - \sqrt{5}$$

Yhtälön voi ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.

$$(x+1)^2 = 5$$

$$x + 1 = \sqrt{5} \qquad\qquad \text{tai} \qquad\qquad x + 1 = -\sqrt{5}$$

$$x = -1 + \sqrt{5} \qquad\qquad\qquad\qquad x = -1 + \sqrt{5}$$

b) $x^2 + 1 = 4x$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ $a = 1, \quad b = -4, \quad c = 1$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(2 \pm \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$x = 2 + \sqrt{3}$ tai $x = 2 - \sqrt{3}$

Vastaus: a) $x = -1 - \sqrt{5}$ tai $x = -1 + \sqrt{5}$
b) $x = 2 - \sqrt{3}$ tai $x = 2 + \sqrt{3}$

192

Merkitään siskojen ikää kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö annetuista tiedoista.

Ikä kerrotaan luvulla 14 ja tulosta vähennetään 33: $14x-33$

Iän neliö: x^2

$$14x-33=x^2$$

$$-x^2+14x-33=0$$

Ratkaistaan laskimella

$x=3$ tai $x=11$

Siskojen iät ovat siis 3 vuotta ja 11 vuotta.

Vastaus: 3 ja 11 vuotta

193

$f(t) = at^2 + a^2 t + 18$

Muodostetaan annetun tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan vakion a arvo laskimella.

$$f(-3) = 6$$

$$a \cdot (-3)^2 + a^2 \cdot (-3) + 18 = 6$$

$$-3a^2 + 9a + 18 = 6$$

$$-3a^2 + 9a + 12 = 0$$

$$a = -1 \quad \text{tai} \quad a = 4$$

Vastaus: $a = -1$ tai $a = 4$

194

Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$(2-a)(2+1)=15$$
$$a=-3$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$(x-(-3))(x+1)=15$$
$$(x+3)(x+1)=15 \qquad \text{Sievennetään laskimella.}$$
$$x^2+4x+3=15$$
$$x^2+4x-12=0 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$
$$x=-6 \quad \text{tai} \quad x=2$$

Toinen juuri on siis –6.

Vastaus: $a = –3$, toinen juuri $x = –6$

195

a) $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad a = 1, \quad b = 1, \quad c = -6$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

b) $6x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad\qquad a = 6, \quad b = -1, \quad c = -1$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$$x = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Vastaus: a) $x = -3$ tai $x = 2$ b) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{2}$

196

a) $5x^2 = -x$

$5x^2 + x = 0$ $a = 5,\ \ b = 1,\ \ c = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{2 \cdot 5} = \frac{-1 \pm 1}{10}$$

$$x = \frac{-1+1}{10} = 0 \ \text{ tai } \ x = \frac{-1-1}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

b) $x^2 + x = 2 - 2x^2$

$x^2 + 2x^2 + x - 2 = 0$

$3x^2 + x - 2 = 0$ $a = 3,\ \ b = 1,\ \ c = -2$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$$

$$x = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \ \text{ tai } \ x = \frac{-1-5}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Vastaus: a) $x = -\frac{1}{5}$ tai $x = 0$ b) $x = -1$ tai $x = \frac{2}{3}$

197

a) $(x-3)^2 = 3$

$x^2 - 6x + 9 = 3$

$x^2 - 6x + 6 = 0 \qquad a = 1, \ b = -6, \ c = 6$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(3 \pm \sqrt{3})}{\cancel{2}} = 3 \pm \sqrt{3}$$

$x = 3 + \sqrt{3}$ tai $x = 3 - \sqrt{3}$

Yhtälön voi ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.

$(x-3)^2 = 3$

$x - 3 = \sqrt{3}$ tai $x - 3 = -\sqrt{3}$

$x = 3 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $x = 3 - \sqrt{3}$

b) $x^2 = 1 - 2x$

$x^2 + 2x - 1 = 0$ $a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(-1 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$x = -1 + \sqrt{2}$ tai $x = -1 - \sqrt{2}$

Vastaus: a) $x = 3 - \sqrt{3}$ tai $x = 3 + \sqrt{3}$
b) $x = -1 - \sqrt{2}$ tai $x = -1 + \sqrt{2}$

198

a) $h(t) = 0$

$$-t^2 + 10t = 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$t^2 - 10t = 0 \qquad a = -1, \;\; b = -10, \;\; c = 0$$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 10}{2}$$

$$t = \frac{10+10}{2} = \frac{20}{2} = 10 \quad \text{tai} \quad t = \frac{10-10}{2} = 0$$

b) $h(t) = 30$

$$-t^2 + 10t = 30$$

$$-t^2 + 10t - 30 = 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$t^2 - 10t + 30 = 0 \qquad a = -1, \;\; b = -10, \;\; c = 30$$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Koska lukua $\sqrt{-20}$ ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole juuria.
Täten funktion h arvo ei ole 30 millään muuttujan t arvolla.

c) $$h(t) = 25$$

$$-t^2 + 10t = 25$$

$$-t^2 + 10t - 25 = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$t^2 - 10t + 25 = 0 \qquad a = -1, \quad b = -10, \quad c = 25$$

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 0}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Vastaus:
a) $t = 0$ tai $t = 10$
b) Ei millään muuttujan t arvolla.
c) $t = 5$

199

a) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \qquad \Big| \cdot 9$

$9x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad a = 9,\ \ b = -6,\ \ c = 1$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x-3}{12} = \frac{1}{3} \qquad \Big| \cdot 12$

$6x^2 - (x-3) = 4$

$6x^2 - x + 3 - 4 = 0$

$6x^2 - x - 1 = 0 \qquad a = 6,\ \ b = -1,\ \ c = -1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$x = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1-5}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$

Vastaus: a) $x = \frac{1}{3}$ b) $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{1}{2}$

200

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-4)^2 = (3-x)(3+x)$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot (-4) + (-4)^2 = 3^2 - x^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9 - x^2$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 9 = 0$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \qquad a = 2, \quad b = -8, \quad c = 7$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{8}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{18}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(4 \pm \sqrt{2})}{\underset{9}{\cancel{18}}} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{9}$$

$$x = \frac{4-\sqrt{2}}{9} \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-\sqrt{2}}{9}$$

Vastaus: $x = \frac{4-\sqrt{2}}{9}$ tai $x = \frac{4-\sqrt{2}}{9}$

201

Merkitään veljien ikää kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö annetuista tiedoista.

Iän neliöön lisätään luku 14: $x^2 + 14$

Ikä yhdeksänkertaisena: $9x$

$$x^2 + 14 = 9x$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$ Ratkaistaan laskimella

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 7$$

Veljien iät ovat siis 2 vuotta ja 7 vuotta.

Vastaus: 2 ja 7 vuotta

202

Olkoon x parillinen luku. Tällöin luvut $x - 1$ ja $x + 1$ ovat kaksi peräkkäistä paritonta lukua.

Muodostetaan näiden peräkkäisten parillisten lukujen tulo.

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

Vuosiluvut, jotka ovat kahden peräkkäisen parittoman luvun tuloja, ovat siis funktion $f(x) = x^2 - 1$ arvoja, missä x on jokin parillinen luku.

Taulukoidaan muuttujan x eri arvoja vastaavia syntymävuosia.

$x = 40$	$f(x) = 40^2 - 1 = 1599$, ei voi olla isoisän syntymävuosi
$x = 42$	$f(x) = 42^2 - 1 = 1763$, ei voi olla isoisän syntymävuosi
$x = 44$	$f(x) = 44^2 - 1 = 1935$, voi olla isoisän syntymävuosi
$x = 46$	$f(x) = 46^2 - 1 = 2115$, ei voi olla isoisän syntymävuosi

Siis isoisän syntymävuosi on 1935.

Vastaus: 1935

203

Merkitään ensimmäistä lukua kirjaimella x. Tätä seuraavat luonnolliset luvut ovat $x + 1$ ja $x + 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad \Big| \text{ sijoitetaan } y = x+1 \text{ ja } z = x+2$$

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Koska –1 ei ole luonnollinen luku, se ei käy ratkaisuksi. Ensimmäinen luku on siis 3 ja kaksi seuraavaa lukua 4 ja 5

Vastaus: 3, 4 ja 5

204

Funktion f nollakohta on –1 eli $f(-1)=0$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$f(-1)=0$$

$$5(-1+a)(-1-3)=0$$

$$a=1$$

Funktioksi saadaan $f(t)=5(t+1)(t-3)$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan millä muuttujan t arvolla funktion arvo on 30.

$5(t+1)(t-3)=30$ Sievennetään laskimella.

$5t^2-10t-15=30$

$5t^2-10t-45=0$ Ratkaistaan laskimella.

$t=1-\sqrt{10}$ tai $t=1+\sqrt{10}$

Vastaus: $a = 1$, $f(t)=30$, kun $t=1-\sqrt{10}$ tai $t=1+\sqrt{10}$

205

Funktion g nollakohta on –3 eli $g(-3)=0$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$g(-3)=0$$

$$2\cdot(-3)^2-a\cdot(-3)-a^2=0$$

$$-a^2+3a+18=0$$

$$a=-3 \quad \text{tai} \quad a=6$$

1) Kun a = –3, funktio on
$g(x)=2x^2-(-3)x-(-3)^2=2x^2+3x-9$.

Ratkaistaan nollakohdat.

$$2x^2+3x-9=0$$

$$x=-3 \quad \text{tai} \quad x=\frac{3}{2}$$

Toinen nollakohta on siis $\frac{3}{2}$.

2) Kun $a = 6$, funktio on $g(x) = 2x^2 - 6x - 6^2 = 2x^2 - 6x - 36$.
Ratkaistaan nollakohdat.

$$2x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{tai} \quad x = 6$$

Toinen nollakohta on siis 6.

Vastaus: Kun $a = -3$, funktion toinen nollakohta on $\frac{3}{2}$.

Kun $a = 6$, funktion toinen nollakohta 6.

206

Sijoitetaan $x = -1$ yhtälöön.

$$(-1)^2 - (a^2 - 1)\cdot(-1) - a^2 = 0$$

$$1 + a^2 - 1 - a^2 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{identtisesti tosi}$$

Yhtälö on siis tosi kaikilla vakion a arvoilla, kun $x = -1$.

Luvun $x = 2$ tulee olla yhtälön toinen juuri. Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$2^2 - (a^2 - 1)\cdot 2 - a^2 = 0$$

$$4 - 2a^2 + 2 - a^2 = 0$$

$$-3a^2 + 6 = 0$$

$$3a^2 = 6$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{2}$$

Vastaus: Yhtälön toinen juuri on $x = 2$, kun $a = -\sqrt{2}$ tai $a = \sqrt{2}$.

207

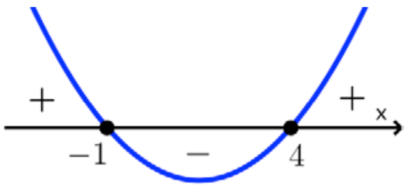
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad a = 1, \; b = -3, \; c = -4$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Hahmotellaan funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ kuvaaja, joka on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ arvot ovat positiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 4$.

Vastaus: $x < -1$ tai $x > 4$

208

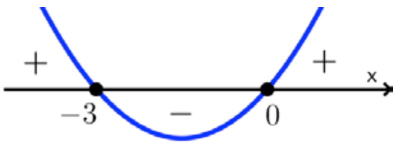
Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ nollakohdat.

$2x^2 + 6x = 0$ $\quad a = 2,\ b = 6,\ c = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 6}{4}$$

$$x = \frac{-6 - 6}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 + 6}{4} = 0$$

Hahmotellaan funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ kuvaaja, joka on ylöspäin aukeava paraabeli.



Funktion $f(x) = 2x^2 + 6x$ arvot ovat negatiivisia,
kun $-3 < x < 0$.

Vastaus: $\quad -3 < x < 0$

209

a) $2x^2 + x - 3 \geq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ nollakohdat.

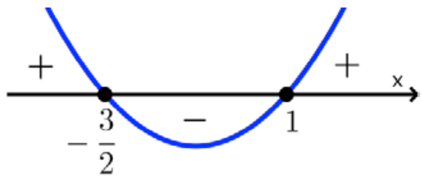
$2x^2 + x - 3 = 0$ $\quad\quad$ $a = 2, \quad b = 1, \quad c = -3$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{-1-5}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = 2x^2 + x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $2x^2 + x - 3 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -\frac{3}{2}$ tai $x \geq 1$.

b) $-x^2 + 9x - 8 < 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 9x - 8$ nollakohdat.

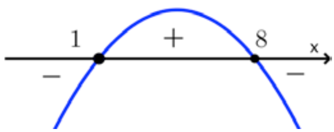
$-x^2 + 9x - 8 = 0 \qquad a = -1,\ b = 9,\ c = -8$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{-9 \pm 7}{-2}$$

$$x = \frac{-9+7}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-9-7}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -x^2 + 9x - 8$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-x^2 + 9x - 8 < 0$ toteutuu, kun $x < 1$ tai $x > 8$.

Vastaus: a) $x \le -\dfrac{3}{2}$ tai $x \ge 1$ b) $x < 1$ tai $x > 8$

210

a) $$x^2 \le 9$$

$$x^2 - 9 \le 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 9$ nollakohdat.

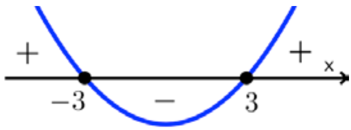
$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9} = -3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 9$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 9 \le 0$ toteutuu, kun $-3 \le x \le 3$.

b) $$12 > 3x^2$$

$$-3x^2 + 12 > 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -3x^2 + 12$ nollakohdat.

$$-3x^2 + 12 = 0$$

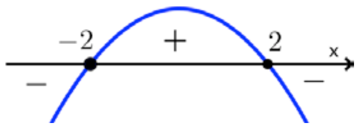
$$-3x^2 = -12$$

$$x^2 = 4$$

$x = \sqrt{4} = 2$ tai $x = -\sqrt{4} = -2$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -3x^2 + 12$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-3x^2 + 12 > 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 2$.

Vastaus: a) $-3 \leq x \leq 3$ b) $-2 < x < 2$

211

a) $$x^2 + 4 > 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 > 0$$

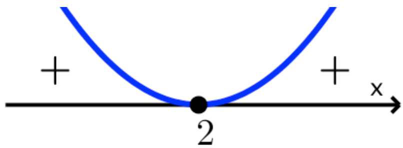
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ nollakohdat.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad a = 1,\ b = -4,\ c = 4$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 2$.



Funktio f ei siis saa millään muuttujan x arvoilla negatiivisia arvoja. Arvon nolla funktio f saa, kun $x = 2$.

Epäyhtälö $x^2 - x + 4 > 0$ toteutuu, kun $x \neq 2$.

b) $x(x+2) \leq -1$

$x^2 + 2x + 1 \leq 0$

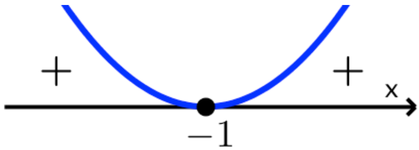
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ nollakohdat.

$x^2 + 2x + 1 = 0$ $a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = 1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = -1$.



Funktio f ei siis saa millään muuttujan x arvoilla negatiivisia arvoja. Arvon nolla funktio f saa, kun $x = -1$.

Epäyhtälö $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ toteutuu, kun $x = -1$.

Vastaus: a) $x \neq 2$ b) $x = -1$

212

a) $(x-2)^2 < 9$

$x^2 - 4x + 4 < 9 \quad \Big| -9$

$x^2 - 4x - 5 < 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4x - 5$ nollakohdat.

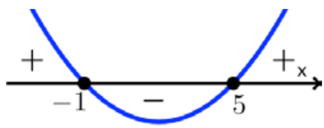
$x^2 - 4x - 5 = 0 \qquad a = 1, \quad b = -4, \quad c = -5$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x - 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 4x - 5 < 0$ toteutuu, kun $-1 < x < 5$.

b) $$(2x+1)^2 \geq x^2$$

$$(2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 \geq x^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 \qquad \big| -x^2$$

$$3x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ nollakohdat.

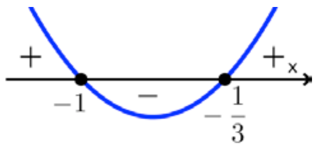
$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \qquad a = 3,\; b = 4,\; c = 1$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

$$x = \frac{-4-2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $3x^2 + 4x + 1 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq -1$ tai $x \geq -\frac{1}{3}$.

Vastaus: a) $-1 < x < 5$ b) $x \leq -1$ tai $x \geq -\frac{1}{3}$

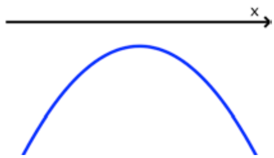
213

Sievennetään funktion lauseke.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 7x-(x+2)^2 \\
&= 7x-(x^2+4x+4) \\
&= 7x-x^2-4x-4 \\
&= -x^2+3x-4
\end{aligned}
$$

Funktion f kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli.

Funktio saa vain negatiivisia arvoja, mikäli sen kuvaaja on kokonaan x-akselin alapuolella. Funktion f kuvaaja on kokonaan x-akselin alapuolella, mikäli funktiolla f ei ole yhtään nollakohtaa.



Ratkaistaan funktion $f(x)=-x^2+3x-4$ nollakohdat.

$$-x^2+3x-4=0 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$x^2-3x+4=0 \qquad a=1,\ \ b=-4,\ \ c=-5$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$$

Koska lukua $\sqrt{-7}$ ei ole määritelty, ei yhtälöllä ole juuria. Siis funktiolla f ei ole yhtään nollakohtaa. Täten funktion f kuvaaja on kokonaan x-akselin alapuolella ja funktio f saa vain negatiivisia arvoja. □

214

Merkitään lukua kirjaimella x. Luvun neliö on tällöin x^2.

Luvun x ja sen neliön summa $x + x^2$ tulee olla korkeintaan 30 eli $x + x^2 < 30$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$x + x^2 \leq 30$$

$$-6 \leq x \leq 5$$

Välillä $-6 \leq x \leq 5$ olevat positiiviset kokonaisluvut ovat
1, 2, 3, 4 ja 5.

Vastaus: 1, 2, 3, 4 ja 5

215

a) Koska neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille, niin funktio $f(x)=\sqrt{x^2-7x}$ on määritelty, kun $x^2-7x\geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$x^2-7x\geq 0$$

$$x\leq 0 \text{ tai } x\geq 7$$

b) Funktio $f(x)=\sqrt{10-x(17-3x)}=\sqrt{10-17x+3x^2}$ on määritelty, kun $10-17x+3x^2\geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$10-17x+3x^2\geq 0$$

$$x\leq \frac{2}{3} \text{ tai } x\geq 5$$

Vastaus: a) $x\leq 0$ tai $x\geq 7$ b) $x\leq \frac{2}{3}$ tai $x\geq 5$

216

a) $2x^2 - 10x + 12 \geq 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ nollakohdat.

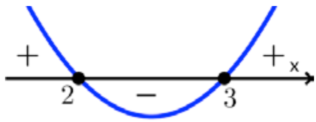
$2x^2 - 10x + 12 = 0$ $\quad a = 2,\; b = -10,\; c = 12$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

$$x = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{10+2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $2x^2 - 10x + 12 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq 2$ tai $x \geq 3$.

b) $x^2 < -x$

$x^2 + x < 0$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 + x$ nollakohdat.

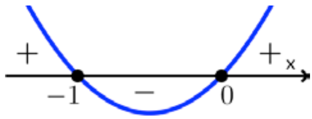
$x^2 + x = 0$ $\quad a = 1, \; b = 1, \; c = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 + x$
kuvaaja on ylöspäin aukeava
paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 + x < 0$ toteutuu, kun $-1 < x < 0$.

Vastaus: a) $x \leq 2$ tai $x \geq 3$ b) $-1 < x < 0$

217

a) $$x^2 < \frac{1}{4}$$

$$x^2 - \frac{1}{4} < 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ nollakohdat.

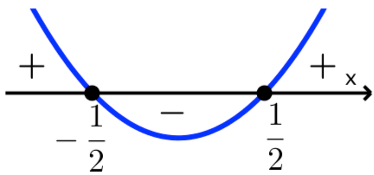
$$x^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - \frac{1}{4} < 0$ toteutuu, kun $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

b) $x(6-x) \leq 9$

$6x - x^2 \leq 9$

$-x^2 + 6x - 9 \leq 0$

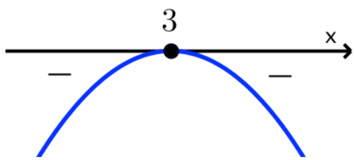
Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ nollakohdat.

$-x^2 + 6x - 9 = 0$ $\quad$ $a = -1, \;\; b = 6, \;\; c = -9$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 3$.



Epäyhtälö $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

Vastaus: a) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ b) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.

218

a) $$(x-5)^2 > 3-x^2$$

$$x^2-10x+25 > 3-x^2$$

$$2x^2-10x+22 > 0$$

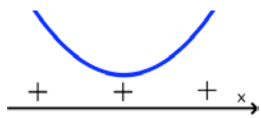
Ratkaistaan funktion $f(x)=2x^2-10x+22$ nollakohdat.

$2x^2-10x+22=0$ $\quad a=2,\ \ b=-10,\ \ c=22$

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 2\cdot 22}}{2\cdot 2}=\frac{10\pm\sqrt{-76}}{4}$$

Lukua $\sqrt{-76}$ ei ole määritelty, joten funktiolla f ei ole nollakohtia.

Koska funktion $f(x)=2x^2-10x+22$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja funktiolla ei ole nollakohtia, niin funktion f kaikki arvot ovat positiivisia.



Epäyhtälö $2x^2-10x+22>0$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) $(x-1)^2 > 2x-3$

$x^2 - 2x + 1 > 2x - 3$

$x^2 - 4x + 4 > 0$

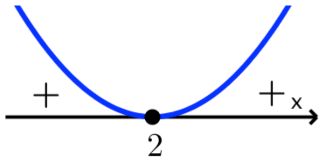
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ nollakohdat.

$x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad a = 1, \quad b = -4, \quad c = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 2$.



Funktio f ei siis saa millään muuttujan x arvoilla negatiivisia arvoja. Arvon nolla funktio f saa, kun $x = 2$.

Epäyhtälö $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ toteutuu, kun $x = 2$.

Vastaus: a) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut. b) $x = 2$

219

Sievennetään funktion lauseke.

$$f(x) = x(x-6) + 9 = x^2 - 6x + 9$$

Funktion f kuvaaja on siis ylöspäin aukeava paraabeli.

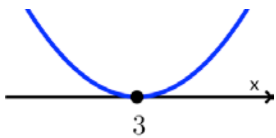
Funktio ei saa negatiivisia arvoja, mikäli sen kuvaaja on kaikilla muuttujan x arvoilla x-akselilla tai sen yläpuolella. Funktion f kuvaaja on kaikilla muuttujan x arvoilla x-akselilla tai sen yläpuolella mikäli funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta.

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 6x + 9$ nollakohdat.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \qquad a = 1, \; b = -6, \; c = 9$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Funktion f ainut nollakohta on 3. Täten funktion f kuvaaja on kaikilla muuttujan x arvoilla x-akselilla tai sen yläpuolella. Funktio f ei siis saa negatiivisia arvoja. □



220

Kaksoisepäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ toteutuu niillä muuttujan x arvoilla, joilla totetuu sekä epäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5$, että $x^2 - 5x + 5 < 1$. Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt.

$$-1 < x^2 - 5x + 5$$

$$-x^2 + 5x - 5 - 1 < 0$$

$$-x^2 + 5x - 6 < 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ nollakohdat.

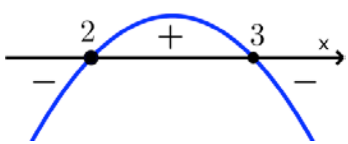
$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \qquad a = -1,\ b = 5,\ c = -6$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$x = \frac{-5+1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5-1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $-x^2 + 5x - 6 < 0$ toteutuu, kun $x < 2$ tai $x > 3$.

$$x^2 - 5x + 5 < 1 \qquad | -1$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 - 5x + 4$ nollakohdat.

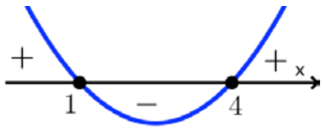
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad a = 1,\ \ b = -5,\ \ c = 4$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

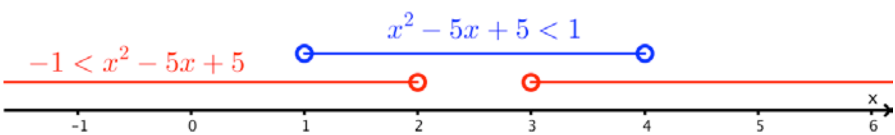
Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 5x + 4 < 0$ toteutuu, kun $1 < x < 4$.

Kaksoisepäyhtälö $-1 < x^2 - 5x + 5 < 1$ toteutuu, kun molemmat ehdoista $x < 2$ tai $x > 3$ ja $1 < x < 4$ ovat voimassa eli kun $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$.



Vastaus: $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$

221

a) Koska neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille ja luvulla nolla ei voi jakaa, niin funktio $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x^2+11x-10}}$ on määritelty, kun $6x^2+11x-10>0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$6x^2+11x-10>0$$

$$x<-\frac{5}{2} \text{ tai } x>\frac{2}{3}$$

b) Funktio $f(x)=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on määritelty, kun sekä $\sqrt{2x-1}$, että $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on määritelty.

Funktio $\sqrt{2x-1}$ on määritelty, kun $2x-1\geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$2x-1\geq 0$$

$$2x\geq 1$$

$$x\geq \frac{1}{2}$$

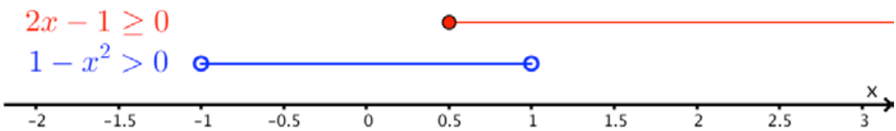
Funktio $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ on määritelty, kun $1-x^2>0$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$1-x^2>0$$

$$-1<x<1$$

Funktio f on määritelty, kun molemmat ehdoista $x \geq \frac{1}{2}$ ja $-1 < x < 1$ on voimassa eli kun $\frac{1}{2} \leq x < 1$.



Vastaus: a) $x < -\frac{5}{2}$ tai $x > \frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2} \leq x < 1$

222

Merkitään lukua kirjaimella x. Luvun neliö on tällöin x^2.

Luvun neliön x^2 tulee olla pienempi kuin luku x itse eli $x^2 < x$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$x^2 < x$$

$$0 < x < 1$$

Vastaus: Luvut x, jotka toteuttavat ehdon $0 < x < 1$.

223

Merkitään lukua kirjaimella x. Luvun neliö on tällöin x^2.

Luvun neliön x^2 ja luvun x erotuksen $x^2 - x$ tulee olla vähintään 20 eli $x^2 - x \geq 20$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$x^2 - x \geq 20$$

$$x \leq -4 \text{ tai } x \geq 5$$

Koska lukujen piti olla positiivisia, niin ratkaisuksi kelpaavat ne luvut x, jotka toteuttavat ehdon $x \geq 5$.

Vastaus: Luvut x, jotka toteuttavat ehdon $x \geq 5$.

224

Pallon korkeuden $24t-4,9t^2$ tulee olla suurempi kuin 5 eli $24t-4,9t^2>5$.

Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$$24t-4,9t^2>5$$

$$0,218...<t<4,679...$$

Pallo on siis yli 5 m:n korkeudella aikavälin $0,218...<t<4,679...$.
Lasketaan aikavälin pituus.

$$4,679...-0,218...=4,461...\approx 4,5\ \text{(s)}$$

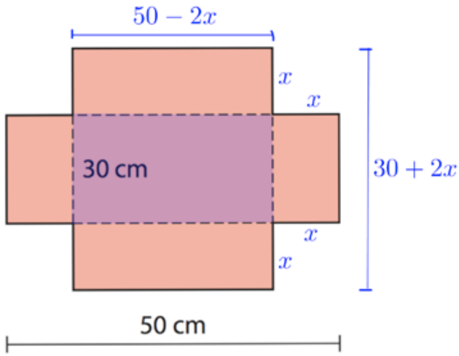
Pallon on yli 5 m:n korkeudella 4,5 sekunnin ajan.

Vastaus: 4,5 s

225

Merkitään pois leikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella x.

Tällöin laatikon pohjan leveys on $50-2x$ ja rullasta leikattavan pahvipalan pituus $30+2x$.



Laatikon mitat senttimetreinä ovat siis: leveys $50-2x$, pituus 30 ja korkeus x.

Laatikon tilavuus on tällöin $(50-2x)\cdot 30\cdot x=-60x^2+1500x$.
Toisaalta laatikon tilavuuden tulla olla vähintään
6 L = 6 dm^3 = 6000 cm^3.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$-60x^2+1500x>6000$$

$$5<x<20$$

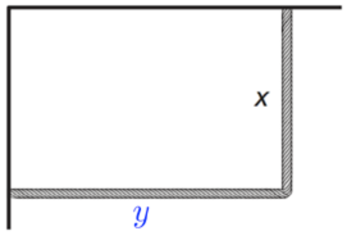
Pois leikattavan neliön sivun pituuden x pitää siis olla välillä
$5 \text{ cm}<x<20 \text{ cm}$.

Tällöin rullasta leikattavan pahvipalan pituus on
vähintään $30+2x=30+2\cdot 5 \text{ cm}=40 \text{ cm}$ ja
enintään $30+2x=30+2\cdot 20 \text{ cm}=70 \text{ cm}$.

Vastaus: Pois leikattavan neliön sivun pituus on vähintään 5cm ja enintään 20 cm. Pahvia tarvitaan vähintään 40 cm ja enintään 70 cm.

226

a) Merkitään alueen pituutta kirjaimella y.



Köyttä on yhteensä 18 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$x + y = 18$$

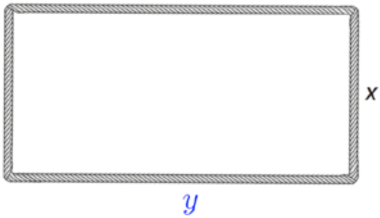
$$y = 18 - x$$

Alueen pituus on $18 - x$.

Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x(18 - x) = 18x - x^2$$

b) Merkitään alueen pituutta kirjaimella y.



Köyttä on yhteensä 126 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$2x+2y=126$$

$$2y=126-2x \quad \Big| :2$$

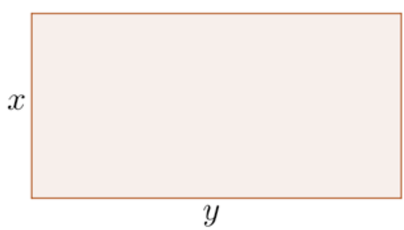
$$y=63-x$$

Alueen pituus on $63-x$.

Muodostetaan alueen pinta-alan lauseke.

$$x\cdot y = x(63-x)=63x-x^2$$

Vastaus: a) pituus $18-x$, pinta-ala $x(18-x)=18x-x^2$
b) pituus $63-x$, pinta-ala $x(63-x)=63x-x^2$



227

a) Merkitään suorakulmion leveyttä kirjaimella x ja pituutta kirjaimella y.

Suorakulmion piiri on 164 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$2x + 2y = 164$$

$$2y = 164 - 2x \quad \Big| :2$$

$$y = 82 - x$$

Muodostetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

$$x \cdot y = x(82 - x) = 82x - x^2$$

b) Pinta-ala on 1600 m^2. Ratkaistaan muuttuja x.

$$82x - x^2 = 1600$$

$$-x^2 + 82x - 1600 = 0$$

$$x = 32 \quad \text{tai} \quad x = 50$$

c) Jos kentän leveys x on 32 (m), niin pituus on
$y = 82 - x = 82 - 32 = 50$ (m).

Jos kentän leveys x on 50 (m), niin pituus on
$y = 82 - x = 82 - 50 = 32$ (m).

Molemmissa tapauksissa sivujen pituudet ovat 32 m ja 50 m.

Vastaus: a) $x(82 - x) = 82x - x^2$
b) yhtälö $82x - x^2 = 1600$, $x = 32$ tai $x = 50$
c) 32m ja 50 m

228

a) Leveyssuunnassa omenapuita on x kappaletta, joten pituussuunnassa niitä on $x + 7$ kappaletta.

Omenapuita on kaikkiaan $x(x+7) = x^2 + 7x$ kappaletta.

b) Omenapuita on yhteensä 144. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$x^2 + 7x = 144$$

$$x^2 - 7x - 144 = 0$$

$$x = -16 \quad \text{tai} \quad x = 9$$

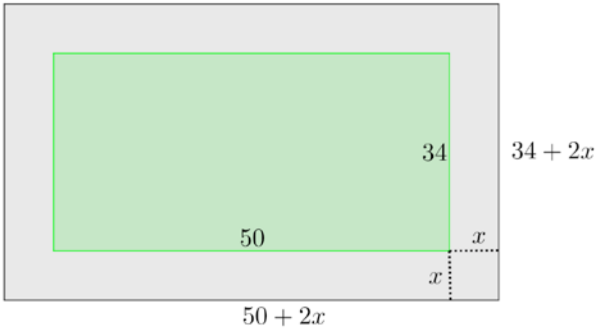
Negatiivinen juuri ei voi olla omenapuiden määrä leveyssuunnassa, joten $x = 9$.

Vastaus: a) $x(x+7) = x^2 + 7x$

b) yhtälö $x^2 + 7x = 144$, $x = 9$

229

Piirretään kuva. Merkitään jalkakäytävän leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus on $50 + 2x$ (m) ja leveys $34 + 2x$ (m). Kokonaispinta-ala on $2145\ \mathrm{m}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jalkakäytävän leveys x.

$$(50 + 2x)(34 + 2x) = 2145$$

$$4x^2 + 168x + 1700 = 2145$$

$$4x^2 + 168x - 445 = 0$$

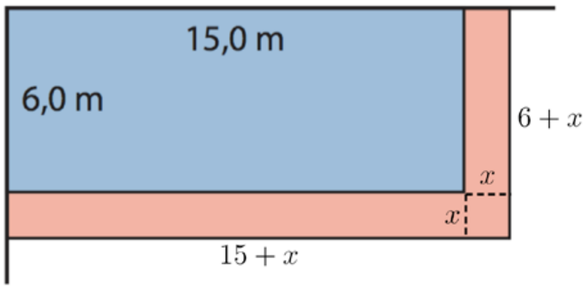
$$x = -44,5 \quad \text{tai} \quad x = 2,5$$

Negatiivinen juuri ei voi olla jalkakäytävän leveys. Jalkakäytävän leveys on siis 2,5 m.

Vastaus: 2,5 m

230

Piirretään kuva. Merkitään käytävän leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus on $15 + x$ (m) ja leveys $6 + x$ (m). Käytävän pinta-ala saadaan, kun tämän suorakulmion pinta-alasta vähennetään uima-altaan pinta-ala.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan käytävän leveys x.

$$(15+x)(6+x)-15\cdot 6=41$$

$$x^2+21x=41$$

$$x^2+21x-41=0$$

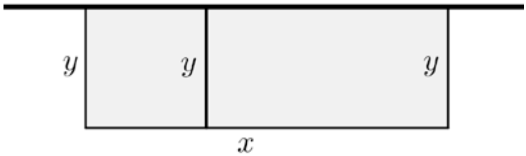
$$x=-22{,}798\ldots \quad \text{tai} \quad x=1{,}798\ldots$$

Negatiivinen juuri ei voi olla käytävän leveys. Käytävän leveys on siis 1,8 m.

Vastaus: 1,8 m

231

Piirretään kuva. Merkitään aitauksen seinän suuntaisen sivun pituutta kirjaimella x ja seinää vastaan kohtisuoran sivun kirjaimella y.



Aitaa on käytettävissä 15 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$3y + x = 15$$

$$3y = 15 - x \quad \big| :3$$

$$y = 5 - \frac{1}{3}x$$

Aitauksen pinta-ala on vähintään 12 m^2. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$xy \geq 12$$

$$x(5 - \frac{1}{3}x) \geq 12$$

$$5x - \frac{1}{3}x^2 \geq 12$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + 5x - 12 \geq 0$$

$$3 \leq x \leq 12$$

Vastaus: Seinän suuntaisen sivun pituuden tulee olla vähintään 3 m ja enintään 12 m.

232

a) Aritmeettisen jonon $-2, 1, 4, \ldots$ ensimmäinen jäsen $a_1 = -2$ ja differenssi $d = 1 - (-2) = 3$.

Muodostetaan yleinen jäsen eli n:s jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= -2 + (n-1)\cdot 3 \\ &= -2 + 3n - 3 \\ &= 3n - 5 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan lauseke aritmeettisen jonon n ensimmäisen termin summalla.

$$\begin{aligned} S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= n \cdot \frac{-2 + 3n - 5}{2} \\ &= n \cdot \frac{3n - 7}{2} \\ &= n\left(\frac{3}{2}n - \frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{2}n \end{aligned}$$

Summa tulee olla yli 1000. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan jäsenien lukumäärä *n*.

$$\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n>1000$$

$$\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n-1000>0$$

$n<-24,679...$ tai $n>27,012...$

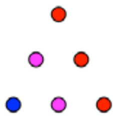
Pienin positiviinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on $n = 28$.

Vastaus: a) $a_n=3n-5$ b) vähintään 28 jäsentä

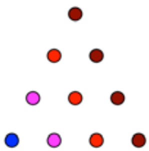
233

$a_1 = 1$

$a_2 = 3 = 1 + 2$



$a_3 = 6 = 1 + 2 + 3$



$a_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Havaitaan, että n:s kolmioluku on luonnollisten lukujen $1, 2, 3, ..., n$ summa. Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa ensimmäinen jäsen on 1 ja differenssi 1.

Muodostetaan summan lauseke.

$$S_n = n\frac{1+n}{2} = n(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

n:s kolmioluku on siis $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan kuinka mones kolmioluku on yli 10 000.

$$a_n > 10\,000$$

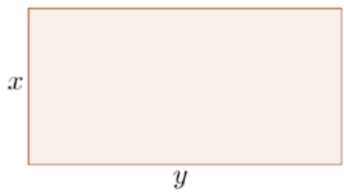
$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n > 10\,000$$

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 10\,000 > 0$$

$$n < -141{,}922... \quad \text{tai} \quad n > 140{,}922...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on $n = 141$.
Siten 141. kolmioluku on ensimmäinen, joka on yli 10 000

Vastaus: 141. jäsen



234

Merkitään suorakulmion leveyttä kirjaimella x ja pituutta kirjaimella y.

Suorakulmion piiri on 200 m. Ratkaistaan muuttuja y.

$$2x+2y=200$$

$$2y=200-2x \qquad |:2$$

$$y=100-x$$

Muodostetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

$$x\cdot y=x(100-x)=100x-x^2$$

Pinta-ala on 2356 m^2. Ratkaistaan muuttuja x.

$$100x-x^2=2356$$

$$-x^2+100x-2356=0$$

$$x=38 \quad \text{tai} \quad x=62$$

Jos alueen leveys x on 38 (m), niin pituus on
$y=100-x=100-38=62$ (m).

Jos alueen leveys x on 62 (m), niin pituus on
$y=100-x=100-62=38$ (m).

Molemmissa tapauksissa sivujen pituudet ovat 38 m ja 62 m.

Vastaus: 38 m ja 62 m

235

Merkitään soittokunnan syvyyttä aluksi kirjaimella x. Tällöin sen leveys on $x - 8$ soittajaa.

Soittajien määrä on $x(x-8) = x^2 - 8x$.

Käännöksen jälkeen syvyys on 4 soittajaa ja leveys $x - 8 + 15 = x + 7$ soittajaa.

Soittajien määrä on $4(x+7) = 4x + 28$.

Soittajien määrä säilyy samana. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$x^2 - 8x = 4x + 28$$

$$x^2 - 12x - 28 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 14$$

Negatiivinen juuri ei käy ratkaisuksi, joten $x = 14$.

Lasketaan soittajien lukumäärä.

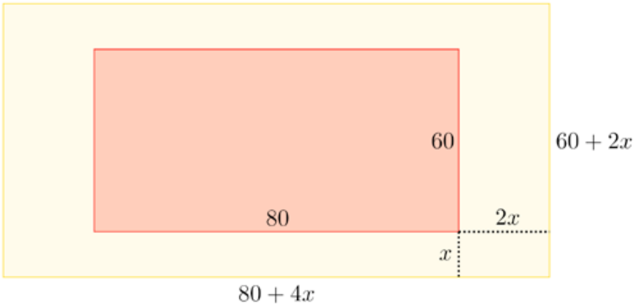
$$4x + 28 = 4 \cdot 14 + 28 = 84$$

Soittajien määrän voi laskea myös lausekkeesta $x^2 - 8x$.

Vastaus: 84 soittajaa

236

Piirretään kuva. Merkitään sivuille ommeltavan kaistaleen leveyttä kirjaimella *x*.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka pituus on $80 + 4x$ (m) ja leveys $60 + 2x$ (m). Peiton uusi pinta-ala on kaksinkertainen alkuperäiseen pinta-alaan nähden. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja *x*.

$$(80+4x)(60+2x)=2\cdot 80\cdot 60$$

$$8x^2+400x+4800=9600$$

$$8x^2+400x-4800=0$$

$$x=-60 \quad \text{tai} \quad x=10$$

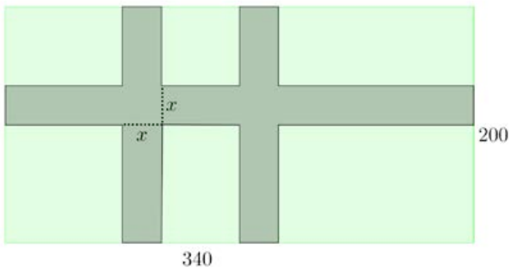
Negatiivinen juuri ei voi olla kaistaleen leveys, joten leveys on 10 cm.

Peiton uusi leveys on $60+2x=60+2\cdot 10=80$ (cm) ja pituus $80+4x=80+4\cdot 10=120$ (cm).

Vastaus: Pituus 120 cm ja leveys 80 cm.

237

Piirretään kuva. Merkitään kävelytien leveyttä kirjaimella x.



Kuvan pystysuuntaisen tien pinta-ala on $200x$, jolloin pystysuuntaisten teiden pinta-ala on yhteensä $2 \cdot 200x = 400x$.

Kuvan vaakasuuntaisesta tiestä pitää laskea se pinta-ala, joka ei ole yhteistä pystysuuntaisten teiden kanssa. Tämän alueen leveys on x ja kokonaispituus $340 - 2x$. Pinta-ala on siis
$x(340 - 2x) = 340x - 2x^2$.

Teiden yhteenlaskettu pinta-ala on 1620 m^2. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kävelytien leveys x.

$$400x + 340x - 2x^2 = 1620$$

$$-2x^2 + 740x - 1620 = 0$$

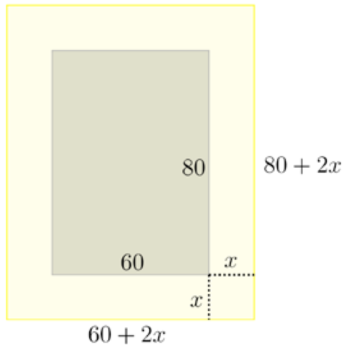
$$x = 2,202... \quad \text{tai} \quad x = 367,797...$$

Kävelytien leveys ei voi olla yli 170 m, koska muutoin kaksi tietä ei mahtuisi rinnakkain puistoon. Siis $x = 2,202... \approx 2,2$ eli kävelytien leveys on 2,2 m.

Vastaus: 2,2 m

238

Piirretään kuva. Merkitään kehyksen leveyttä kirjaimella x.



Ulkoreuna on suorakulmio, jonka mitat ovat $60 + 2x$ (cm) ja $80 + 2x$ (cm). Kehyksen pinta-ala saadaan, kun tämän suorakulmion pinta-alasta vähennetään peilin pinta-ala.

Peilin pinta-ala on $0{,}250\ \text{m}^2 = 2500\ \text{cm}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kehyksen leveys x.

$$(60+2x)(80+2x)-60\cdot 80=2500$$

$$4x^2+280x=2500$$

$$4x^2+280x-2500=0$$

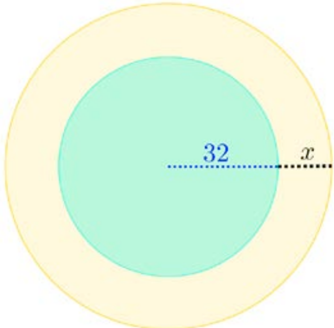
$$x=-78{,}011\ldots \quad \text{tai} \quad x=8{,}011\ldots$$

Negatiivinen juuri ei voi olla kehyksen leveys, joten kehyksen leveys on 8 cm.

Vastaus: 8 cm

239

Piirretään kuva. Merkitään kehyksen leveyttä kirjaimella x.



Peilin halkaisija on 64 cm, joten sen säde on $\frac{64 \text{ cm}}{2} = 32 \text{ cm}$. Ulkoreuna on ympyrä, jonka säde on $32 + x$. Kehyksen pinta-ala saadaan, kun tämän ympyrän pinta-alasta vähennetään peilin pinta-ala.

Peilin pinta-ala on $0{,}250 \text{ m}^2 = 2500 \text{ cm}^2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kehyksen leveys x.

$$\pi \cdot (32 + x)^2 - \pi \cdot 32^2 = 2500$$

$$\pi x^2 + 64\pi x = 2500$$

$$\pi x^2 + 64\pi x - 2500 = 0$$

$$x = -74{,}658... \quad \text{tai} \quad x = 10{,}658...$$

Negatiivinen juuri ei voi olla kehyksen leveys, joten kehyksen leveys on 11 cm.

Vastaus: 11 cm

240

Seuraavassa rivissä on aina kolme tuolia enemmän kuin edellisessä, joten tuolien lukumäärät riveissä muodostavat aritmeettisen jonon, jonka differenssi $d = 3$ ja ensimmäinen jäsen $a_1 = 23$.

Muodostetaan jonon yleinen eli n:s jäsen.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 23 + (n-1)\cdot 3 = 3n + 20$$

Muodostetaan jonon n ensimmäisen jäsenen summan lauseke.

$$S_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$= n\frac{23 + 3n + 20}{2} = n(\frac{3}{2}n + \frac{43}{2}) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{43}{2}n$$

Tuolien kokonaismäärä on 728. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tuolirivien lukumäärä n.

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{43}{2}n = 728$$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{43}{2}n - 728 = 0$$

$$n = -30{,}333... \quad \text{tai} \quad n = 16$$

Negatiivinen juuri ei voi olla penkkirivien lukumäärä, joten tuolirivejä on 16.

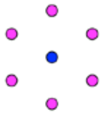
Lasketaan tuolien määrä viimeisessä eli 16. rivissä.

$$a_{16} = 3 \cdot 16 + 20 = 68$$

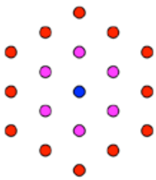
Vastaus: Rivejä on 16 ja viimeisessä rivissä on 68 tuolia.

241

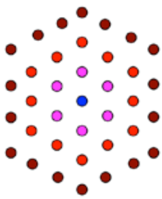
$a_1 = 1$



$a_2 = 3 = 1 + 6$



$a_3 = 6 = 1 + 6 + 12$



$a_4 = 10 = 1 + 6 + 12 + 18$

Havaitaan, että n:s kuusikulmio luku voidaan kirjoittaa summana, jonka ensimmäinen jäsen on 1 ja toisesta jäsenestä alkaen summa on aritmeettinen summa. Aritmeettisen summan 0 + 6 + 12 + 18 + ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 0$ ja differenssi d = 6. Tällöin aritmeettisen summan n:s jäsen on $0 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 6$.

Muodostetaan aritmeettisen summan lauseke.

$$S_n = n\frac{0 + 6n - 6}{2} = n(3n - 3) = 3n^2 - 3n$$

n:s kuusikulmioluku on siis

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + S_n \\ &= 1 + 3n^2 - 3n \\ &= 3n^2 - 3n + 1. \end{aligned}$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan kuinka mones kuusikulmioluku on yli 10 000.

$$a_n > 10\,000$$

$$3n^2 - 3n + 1 > 10\,000$$

$$3n^2 - 3n - 99\,999 > 0$$

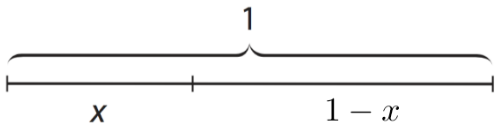
$$n < -57{,}234... \quad \text{tai} \quad n > 58{,}234...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on $n = 59$.
Siten 59. kuusikulmioluku on ensimmäinen, joka on yli 10 000

Vastaus: 59. jäsen

242

a) Merkitään janan lyhyempää osuutta kirjaimella x, jolloin janan pitempi osuus on $1 - x$.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1}$$

$$(1-x)^2 = 1 \cdot x$$

$$1 - 2x + x^2 = x \quad \Big| -x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = 0{,}3819... \quad \text{tai} \quad x = 2{,}618...$$

Janan lyhyemmän osan pituus ei voi olla yli 0,5 m, joten $x = 0{,}3819... \approx 0{,}382$.

Janan pidemmän osan pituus on $1 - 0{,}382 = 0{,}618$.

Vastaus: a) 0,382 ja 0,618

243

Rakennuksen korkeus on 166 m. Merkitään rakennuksen leveyttä kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$\frac{166}{x} = \frac{x}{166 - x}$$

$$x^2 = 166 \cdot (166 - x)$$

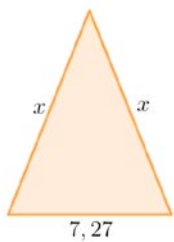
$$x^2 = 27\,556 - 166x$$

$$x^2 + 166x - 27\,556 = 0$$

$$x = -268{,}593... \quad \text{tai} \quad x = 102{,}593...$$

Negatiivinen juuri ei voi olla rakennuksen leveys, joten leveys on 103 m.

Vastaus: 103 m



244

Kolmion kannan pituus on $7{,}27$ m. Merkitään kyljen pituutta kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$\frac{7{,}27}{x} = \frac{x}{7{,}27 + x}$$

$$x^2 = 7{,}27 \cdot (7{,}27xx)$$

$$x^2 = 52{,}8529 + 7{,}27x$$

$$x^2 - 7{,}27x - 52{,}8529 = 0$$

$$x = -4{,}493... \quad \text{tai} \quad x = 11{,}769...$$

Negatiivinen juuri ei voi olla kyljen pituus, joten pituus on 11,8 m.

Vastaus: 11,8 m

245

Olkoon kaksinumeroinen luku xy.

Numeroiden summa on 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y.

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x$$

Luvussa xy numero x on kymmenien paikalla ja numero y ykkösten paikalla. Luku voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$xy = x \cdot 10 + y \cdot 1$$

$$= 10x + y \qquad \text{Sijoitetaan } y = 10 - x$$

$$= 10x + 10 - x = 9x + 10.$$

Kun numerot pannaan vastakkaiseen järjestykseen saadaan luku yx, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$yx = y \cdot 10 + x \cdot 1$$

$$= 10y + x \qquad \text{Sijoitetaan } y = 10 - x$$

$$= 10(10 - x) + x$$

$$= 100 - 10x + x = 100 - 9x.$$

Alkuperäisen ja uuden luvun tulo on 2944. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$(9x+10)(100-9x)=2944$$

$$-81x^2+810x+1000=2944$$

$$-81x^2+810x-1944=0$$

$$x=4 \quad \text{tai} \quad x=6$$

Kun $x = 4$, niin $y=10-x=10-4=6$ ja luku on 46.

Kun $x = 6$, niin $y=10-x=10-6=4$ ja luku on 64.

Vastaus: 46 tai 64

246

a) $214x^2 - 102x + 12 = 0$ $\quad a = 214,\ \ b = -102,\ \ c = 12$

$$D = b^2 - 4ac = (-102)^2 - 4 \cdot 214 \cdot 12 = 132$$

Koska diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

b) $0{,}9x^2 + 14{,}4 = 7{,}2x$

$0{,}9x^2 - 7{,}2x + 14{,}4 = 0$ $\quad a = 0{,}9,\ \ b = -7{,}2,\ \ c = 14{,}4$

$$D = b^2 - 4ac = (-7{,}2)^2 - 4 \cdot 0{,}9 \cdot 14{,}4 = 0$$

Koska diskriminantti on nolla, niin yhtälöllä on yksi juurta.

Vastaus: a) D = 132, kaksi juurta b) D = 0, yksi juuri

247

a) $$13,4x^2 = 4 - 2,57x$$

$$13,4x^2 + 2,57x - 4 = 0 \qquad a = 13,4, \quad b = 2,57, \quad c = -4$$

$$D = b^2 - 4ac = 2,57^2 - 4 \cdot 13,4 \cdot (-4) = 221,0049$$

Koska diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

b) $$8x(1-3x) = 0$$

$$8x - 24x^2 = 0$$

$$-24x^2 + 8x = 0 \qquad a = -24, \quad b = 8, \quad c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot (-24) \cdot 0 = 64$$

Koska diskriminantti on posiitivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

Vastaus: a) D = 221,0049, kaksi juurta
b) D = 64, kaksi juurta

248

a) $x^2 - 6x + 12 = x^2 \quad \Big| - x^2$

$-6x + 12 = 0$ Ensimmäisen asteen yhtälö.

$-6x = -12 \quad \Big| : (-6)$

$x = 2$

Kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö, jolla on yksi juuri.

b) $3x^2 + x - 81 = x \quad \Big| - x$

$3x^2 - 81 = 0$ $a = 3, \ b = 0, \ c = -81$

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-81) = 972$

Koska diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

Vastaus: a) yksi juuri b) kaksi juurta

249

$$4x^2 - 8x + q = 0 \qquad a = 4,\ \ b = -8,\ \ c = q$$

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot q = 64 - 16q$$

a) Toisen asteen yhtälöllä on kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$64 - 16q > 0$$

$$-16q > -64 \qquad | : (-16)$$

$$q < 4$$

Yhtälöllä on kaksi juurta, kun $q < 4$.

b) Toisen asteen yhtälöllä on yksi juuri, kun dikriminantti on nolla. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$64 - 16q = 0$$

$$-16q = -64 \qquad | : (-16)$$

$$q = 4$$

Yhtälöllä on yksi juuri, kun $q = 4$.

c) Toisen asteen yhtälöllä on yksi juuri, kun diskriminantti on nolla ja ei yhtään juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$64-16q \leq 0$$

$$-16q \leq -64 \qquad \Big| : (-16)$$

$$q \geq 4$$

Yhtälöllä on korkeintaan yksi juuri, kun $q \geq 4$.

Vastaus: a) $q < 4$ b) $q = 4$ c) $q \geq 4$

250

Funktion $f(x) = -4x^2 + kx - 1$ nollakohdat ovat yhtälön $-4x^2 + kx - 1 = 0$ juuret.

Lasketaan yhtälön $-4x^2 + kx - 1 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = -4,\ b = k,\ c = -1$$

$$= k^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)$$

$$= k^2 - 16$$

Toisen asteen yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Pitää siis ratkaista epäyhtälö $k^2 - 16 < 0$.

Ratkaistaan funktion $k^2 - 16$ nollakohdat.

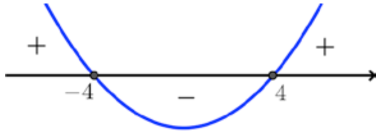
$$k^2 - 16 = 0$$

$$k^2 = 16$$

$$k = \sqrt{16} = 4 \quad \text{tai} \quad k = -\sqrt{16} = -4$$

Hahmotellaan funktion k^2-16 kuvaaja ja päätellään merkit.

Funktion k^2-16 kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $k^2-16<0$ toteutuu, kun $-4 < k < 4$.
Funktiolla $f(x)=-4x^2+kx-1$ ei ole yhtään nollakohtaa, kun $-4 < k < 4$.

Vastaus: $-4 < k < 4$

251

Lasketaan yhtälön $3x^2 + px + 12 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = 3, \ \ b = p, \ \ c = 12$$

$$= p^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12$$

$$= k^2 - 144$$

Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun diskriminantti on nolla. Ratkaistaan vakio p.

$$p^2 - 144 = 0$$

$$p = -12 \ \text{ tai } \ p = 12$$

Muodostetaan arvoa $p = -12$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$3x^2 + px + 12 = 0$$

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$x = 2$$

Näin on saatu selville, että arvoa $p = -12$ vastaa yhtälö $3x^2 - 12x + 12 = 0$, jonka ainoa juuri on $x = 2$.

Muodostetaan arvoa $p = 12$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$3x^2 + px + 12 = 0$$

$$3x^2 + 12x + 12 = 0$$

$$x = -2$$

Näin on saatu selville, että arvoa $p = 12$ vastaa yhtälö $3x^2 + 12x + 12 = 0$, jonka ainoa juuri on $x = -2$.

Vastaus: Kun $p = -12$, yhtälö on $3x^2 - 12x + 12 = 0$ ja sen juuri on $x = 2$.

Kun $p = 12$, yhtälö on $3x^2 + 12x + 12 = 0$ ja sen juuri on $x = -2$.

252

Funktio $f(x) = x(12-3x)$ ei saa arvoa 13, jos yhtälöllä $f(x) = 13$ ei ole yhtään juurta.

Sievennetään yhtälöä.

$$f(x) = 13$$

$$x(12-3x) = 13$$

$$12x - 3x^2 = 13$$

$$-3x^2 + 12x - 13 = 0$$

Lasketaan diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = -3, \ b = 12, \ c = -13$$

$$= 12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-13)$$

$$= -12$$

Koska yhtälön diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole yhtään juurta.

Täten on osoitettu, että funktio $f(x) = x(12-3x)$ ei saa arvoa 13.

$\square$

253

Paraabelin $y=-\frac{1}{3}x^2+bx-12$ huippu on x-akselilla, kun sillä on täsmälleen yksi nollakohta eli yhtälöllä $-\frac{1}{3}x^2+bx-12=0$ on täsmälleen yksi juuri.

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$$D=b^2-4ac \qquad a=-\frac{1}{3},\ \ b=b,\ \ c=-12$$

$$=b^2-4\cdot(-\frac{1}{3})\cdot(-12)$$

$$=b^2-16$$

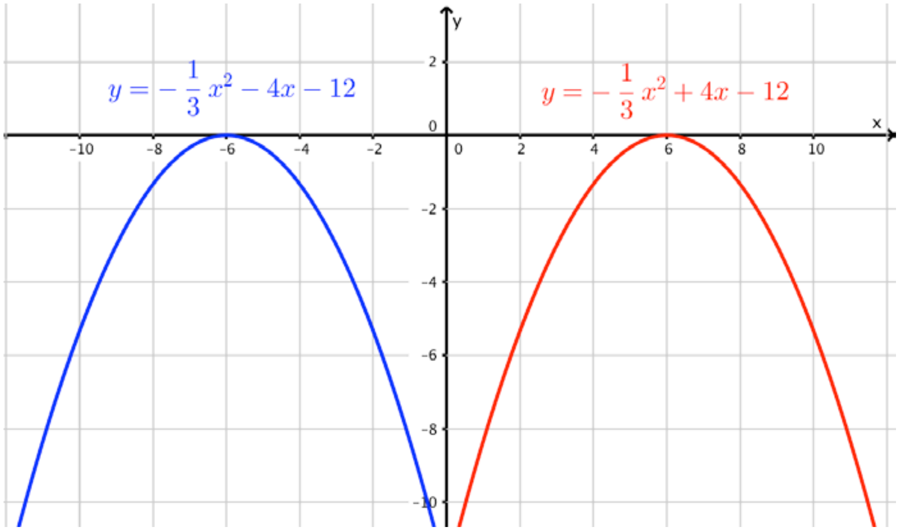
Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun diskriminantti on nolla. Ratkaistaan vakio b.

$$b^2-16=0$$

$$b=-4 \quad \text{tai} \quad b=4$$

Paraabelin $y=-\frac{1}{3}x^2+bx-12$ huippu on x-akselilla, kun $b=-4$ tai $b=4$.

Piirretään vakion b arvoja –4 ja 4 vastaavat paraabelit.



Vastaus: $b = –4$ tai $b = 4$

254

Funktion $g(x) = x^2 + 3kx + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Kuvaaja on kokonaan x-akselin yläpuolella mikäli funktiolla ei ole yhtään nollakohtaa.

Lasketaan yhtälön $x^2 + 3kx + 4 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = 1,\ b = 3k,\ c = 4$$

$$= (3k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= 9k^2 - 16$$

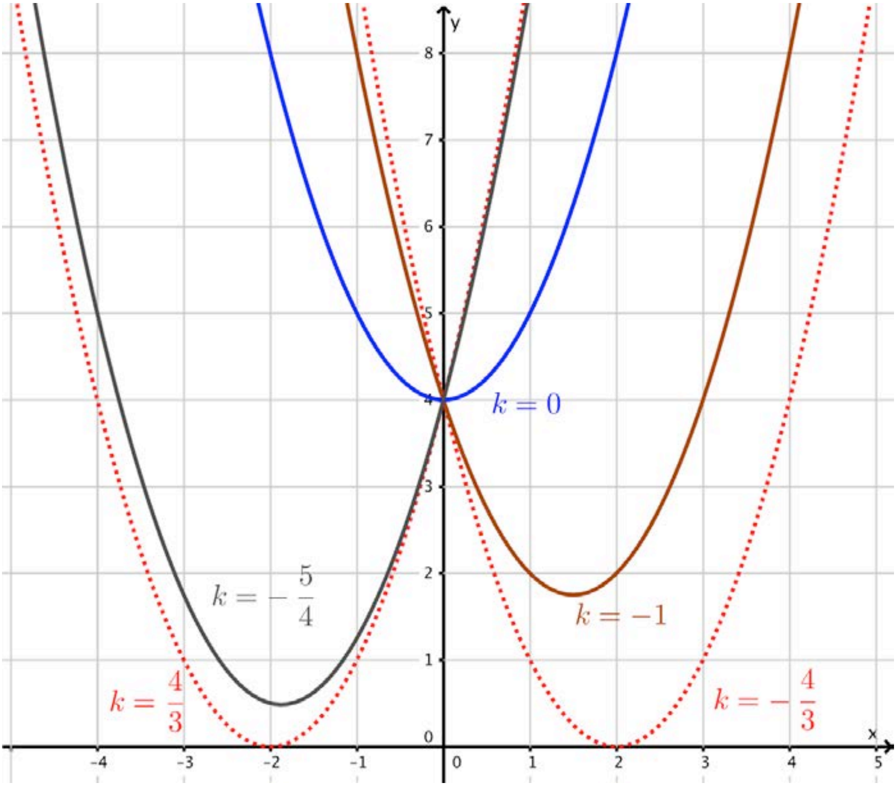
Toisen asteen yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Ratkaistaan vakio k.

$$9k^2 - 16 < 0$$

$$-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$$

Funktion $g(x) = x^2 + 3kx + 4$ kuvaaja on kokonaan x-akselin yläpuolella, kun $-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$.

Piirretään vakion k eri arvoja vastaavia paraabeleja.



Vastaus: $-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$

255

a) $4,02x^2 + 8,14x + 5,03 = 0$ $\quad a = 4,02, \ b = 8,14, \ c = 5,03$

$$D = b^2 - 4ac = 8,14^2 - 4 \cdot 4,02 \cdot 5,03 = -146,6228$$

Koska diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole yhtään juurta.

b) $3x^2 + 14x = 11$

$3x^2 + 14x - 11 = 0$ $\quad a = 3, \ b = 14, \ c = -11$

$$D = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 328$$

Koska diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

Vastaus: a) D = –146,6228, ei yhtään juurta
b) D = 328, kaksi juurta

256

a) $x^3 - 12x^2 + 9 = x^3 - 4x$

$x^3 - x^3 - 12x^2 + 4x + 9 = 0$

$-12x^2 + 4x + 9 = 0$ $\quad a = -12, \ b = 4, \ c = 9$

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 9 = 448$$

Koska diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

b) $2x^3 + x^2 + 6 = x^3 + x^2$

$2x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + 6 = 0$

$x^3 + 6 = 0$ $\quad$ potenssiyhtälö

$x^3 = -6$

$x = \sqrt[3]{-6}$

Kyseessä on potenssiyhtälö, jolla on yksi juuri.

Vastaus: a) kaksi juurta b) yksi juuri

257

Funktion $f(x)=\frac{1}{8}x^2-3x+c$ nollakohdat ovat yhtälön

$\frac{1}{8}x^2-3x+c=0$ juuret.

Lasketaan yhtälön $\frac{1}{8}x^2-3x+c=0$ diskriminantti.

$$D=b^2-4ac \qquad a=\frac{1}{8},\ b=-3,\ c=c$$

$$=(-3)^2-4\cdot\frac{1}{8}\cdot c$$

$$=9-\frac{1}{2}c$$

a) Toisen asteen yhtälöllä on kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$9-\frac{1}{2}c>0$$

$$-\frac{1}{2}c>-9 \qquad |\cdot(-2)$$

$$c<18$$

Yhtälöllä on kaksi juurta, kun $c<18$.

b) Toisen asteen yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$9-\frac{1}{2}c<0$$

$$-\frac{1}{2}c<-9 \qquad \Big|\cdot(-2)$$

$$c>18$$

Yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun $c > 18$.

c) Toisen asteen yhtälöllä on yksi juuri, kun diskriminantti on nolla ja kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$9-\frac{1}{2}c\geq 0$$

$$-\frac{1}{2}c\geq -9 \qquad \Big|\cdot(-2)$$

$$c\leq 18$$

Yhtälöllä on ainakin yksi juuri, kun $c \leq 18$.

Vastaus: a) $c < 18$ b) $c > 18$ d) $c \leq 18$

258

Funktion $g(x)=x^2+bx+9$ nollakohdat ovat yhtälön $x^2+bx+9=0$ juuret.

Lasketaan yhtälön $x^2+bx+9=0$ diskriminantti.

$$D=b^2-4ac \qquad a=1,\ b=b,\ c=9$$

$$=b^2-4\cdot1\cdot9$$

$$=b^2-36$$

Toisen asteen yhtälöllä on kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen. Pitää siis ratkaista epäyhtälö $b^2-36>0$.

Ratkaistaan funktion b^2-36 nollakohdat.

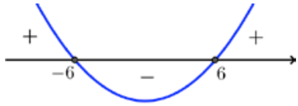
$$b^2-36=0$$

$$b^2=36$$

$$b=\sqrt{36}=6 \quad \text{tai} \quad b=-\sqrt{36}=-6$$

Hahmotellaan funktion $b^2 - 36$ kuvaaja ja päätellään merkit.

Funktion $b^2 - 36$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $b^2 - 36 > 0$ toteutuu, kun $b < -6$ tai $b > 6$.

Funktiolla $g(x) = x^2 + bx + 9$ on kaksi nollakohtaa, kun $b < -6$ tai $b > 6$.

Vastaus: $b < -6$ tai $b > 6$

259

$$f(x) = -3x^2 + 42x - 5$$

a) Lasketaan yhtälön $f(x) = 143$ diskriminantin arvo.

Sievennetään yhtälöä.

$$\begin{aligned} f(x) &= 143 \\ -3x^2 + 42x - 5 &= 143 \qquad \Big| -143 \\ -3x^2 + 42x - 148 &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan diskriminantti.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \qquad a = -3,\ b = 42,\ c = -148 \\ &= 42^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-148) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Koska yhtälön diskriminantti on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole yhtään juurta.

Täten on osoitettu, että funktio $f(x) = -3x^2 + 42x - 5$ ei saa arvoa 143.

b) Lasketaan yhtälön $f(x)=142$ diskriminantin arvo.

Sievennetään yhtälöä.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 142 \\
-3x^2+42x-5 &= 142 \qquad \Big| -143 \\
-3x^2+42x-147 &= 0
\end{aligned}
$$

Lasketaan diskriminantti.

$$
\begin{aligned}
D &= b^2-4ac \qquad a=-3,\ \ b=42,\ \ c=-147 \\
&= 42^2-4\cdot(-3)\cdot(-147) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Koska yhtälön diskriminantti on nolla, niin yhtälöllä on yksi juuri.

Täten on osoitettu, että funktio $f(x)=-3x^2+42x-5$ saa arvon 142 (yhdessä kohdassa).

c) Lasketaan yhtälön $f(x)=141$ diskriminantin arvo.

Sievennetään yhtälöä.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 141 \\
-3x^2+42x-5 &= 141 \quad \Big| -143 \\
-3x^2+42x-146 &= 0
\end{aligned}
$$

Lasketaan diskriminantti.

$$
\begin{aligned}
D &= b^2-4ac \qquad a=-3,\ \ b=42,\ \ c=-146 \\
&= 42^2-4\cdot(-3)\cdot(-146) \\
&= 12
\end{aligned}
$$

Koska yhtälön diskriminantti on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

Täten on osoitettu, että funktio $f(x)=-3x^2+42x-5$ saa arvon 141 (kahdessa kohtaa).

Vastaus: a) ei saa b) saa c) saa

260

Funktio $f(x)=6x^2-24x+c$ saa arvon 210 mikäli yhtälöllä $f(x)=210$ on ainakin yksi juuri.

Sievennetään yhtälöä.

$$f(x)=210$$

$$6x^2-24x+c=210 \quad \Big| -210$$

$$6x^2-24x+c-210=0$$

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$$D=b^2-4ac \qquad a=6,\ \ b=-24,\ \ c=c-210$$

$$=(-24)^2-4\cdot 6\cdot (c-210)$$

$$=-24c+5616$$

Toisen asteen yhtälöllä on ainakin yksi juuri, kun diskriminantti on epänegatiivinen (nolla tai positiivinen). Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$-24c+5616\geq 0$$

$$-4c\geq -5616 \quad \Big| :(-4)$$

$$c\leq 234$$

Vastaus: $c\leq 234$

261

Funktioiden $f(x) = -x^2 + 3x + 7$ ja $g(x) = 5x + q$ kuvaajilla on yksi yhteinen piste mikäli yhtälöllä $f(x) = g(x)$ on täsmälleen yksi juuri.

Sievennetään yhtälöä.

$$f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 3x + 7 = 5x + q$$

$$-x^2 + 3x - 5x + 7 - q = 0$$

$$-x^2 - 2x + 7 - q = 0$$

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = -1,\ b = -2,\ c = 7 - q$$

$$= (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (7 - q)$$

$$= -4q + 32$$

Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun diskriminantti on nolla. Ratkaistaan vakio q.

$$-4q + 32 = 0$$

$$-4q = -32 \qquad \Big| : (-4)$$

$$q = 8$$

Yhteisen pisteen x-koordinaatti saadaan selville, kun muodostetaan arvoa $q = 8$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$-x^2 - 2x + 7 - q = 0$$

$$-x^2 - 2x + 7 - 8 = 0$$

$$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

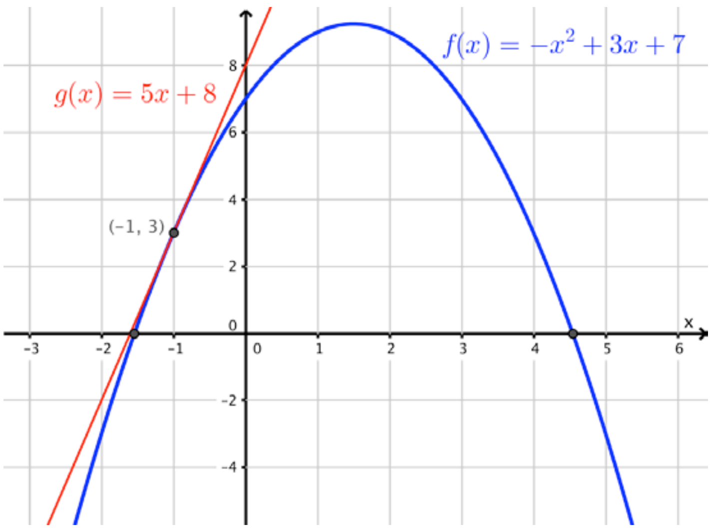
$$x = -1$$

Pisteen y-koordinaatti saadaan sijoittamalla $x = -1$ jompaan kumpaan funktioista.

$$f(-1) = -(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 7 = 3 \quad (\text{tai} \quad g(-1) = 5\cdot(-1) + 8 = 3\,)$$

Yhteinen piste on siis $(-1, 3)$.

Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon.



Vastaus: $q = 8$, piste on $(-1, 3)$

262

Yhtälö $ax^2+(a-3)x+1=0$ on toisen asteen yhtälö vain, jos $a \neq 0$. Pitää siis tutkia erikseen tapaukset $a \neq 0$ ja $a=0$.

1) Oletetaan ensin, että $a \neq 0$.

Lasketaan yhtälön diskriminantti.

$$
\begin{aligned}
D &= b^2-4ac \qquad\qquad a=a,\ \ b=a-3,\ \ c=1 \\
&= (a-3)^2-4\cdot a\cdot 1 \\
&= a^2-6a+9-4a \\
&= a^2-10a+9
\end{aligned}
$$

Yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun diskriminantti saa arvon nolla. Ratkaistaan vakio a.

$$a^2-10a+9=0$$

$$a=1 \text{ tai } a=9$$

Muodostetaan arvoa $a = 1$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$
\begin{aligned}
ax^2+(a-3)x+1&=0 \\
1\cdot x^2+(1-3)x+1&=0 \\
x^2-2x+1&=0 \\
x&=1
\end{aligned}
$$

Näin on saatu selville, että arvoa $a = 1$ vastaa yhtälö $x^2-2x+1=0$, jonka ainoa juuri on $x = 1$.

Muodostetaan arvoa $a = 9$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$$

$$9 \cdot x^2 + (9-3)x + 1 = 0$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Näin on saatu selville, että arvoa $a = 9$ vastaa yhtälö $9x^2 + 6x + 1 = 0$, jonka ainoa juuri on $x = -\frac{1}{3}$.

2) Oletetaan seuraavaksi, että $a = 0$.

Muodostetaan arvoa $a = 0$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$$

$$0 \cdot x^2 + (0-3)x + 1 = 0$$

$$-3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Siis arvoa $a = 0$ vastaa yhtälö $-3x + 1 = 0$, jonka ainoa juuri on $x = \frac{1}{3}$.

Vastaus: Arvoa $a = 0$ vastaa yhtälö $-3x + 1 = 0$, jonka juuri on $x = \frac{1}{3}$.

Arvoa $a = 1$ vastaa yhtälö $x^2 - 2x + 1 = 0$, jonka juuri on $x = 1$.

Arvoa $a = 9$ vastaa yhtälö $9x^2 + 6x + 1 = 0$, jonka juuri on $x = -\frac{1}{3}$.

263

Funktiolla $f(x) = ax^2 - 6x + a - 8$ on kaksi nollakohtaa, kun yhtälöllä $ax^2 - 6x + a - 8 = 0$ kaksi juurta.

Yhtälö $ax^2 - 6x + a - 8 = 0$ on toisen asteen yhtälö vain, jos $a \neq 0$.
Siksi on tutkittava erikseen tapaukset $a = 0$ ja $a \neq 0$.

1) Oletetaan ensin, että $a = 0$.

Muodostetaan arvoa $a = 0$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$ax^2 - 6x + a - 8 = 0$$

$$-6x - 8 = 0$$

$$x = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Siis arvoa $a = 0$ vastaa ensimmäisen asteen yhtälö $-6x - 8 = 0$, jolla on vain yksi juuri. Siten, kun $a = 0$, niin funktiolla $f(x) = ax^2 - 6x + a - 8$ on vain yksi nollakohta.

2) Oletetaan seuraavaksi, että $a \neq 0$.

Lasketaan yhtälön $ax^2 - 6x + a - 8 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = a,\ \ b = -6,\ \ c = a - 8$$

$$= (-6)^2 - 4 \cdot a \cdot (a - 8)$$

$$= 36 - 4a^2 + 32a$$

$$= -4a^2 + 32a + 36$$

Yhtälöllä on kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen.
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan vakio a.

$$-4a^2 + 32a + 36 > 0$$

$$-1 < a < 9$$

Näin on saatu selville, että yhtälöllä on kaksi juurta, kun $a \neq 0$ ja $-1 < a < 9$ eli kun $-1 < a < 0$ tai $0 < a < 9$.

Vastaus: $-1 < a < 0$ tai $0 < a < 9$

264

Funktio $f(x) = \dfrac{3}{ax^2 - ax + 3}$ on määritelty koko reaalilukujen joukossa, kun nimittäjällä ei ole nollakohtia. Siis yhtälöllä $ax^2 - ax + 3 = 0$ ei saa olla yhtään juurta.

Yhtälö $ax^2 - ax + 3 = 0$ on toisen asteen yhtälö vain, jos $a \neq 0$.
Siksi on tutkittava erikseen tapaukset $a = 0$ ja $a \neq 0$.

1) Oletetaan ensin, että $a = 0$.

Muodostetaan arvoa $a = 0$ vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$ax^2 - ax + 3 = 0$$

$$3 = 0$$

epätosi

Nimittäjällä ei siis ole nollakohtia, kun $a = 0$. Funktio on tällöin määritelty koko reaalilukujen joukossa.

2) Oletetaan seuraavaksi, että $a \neq 0$.

Lasketaan yhtälön $ax^2 - ax + 3 = 0$ diskriminantti.

$$D = b^2 - 4ac \qquad a = a,\ \ b = -a,\ \ c = 3$$

$$= (-a)^2 - 4 \cdot a \cdot 3$$

$$= a^2 - 12a$$

Yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan vakio a.

$$a^2 - 12a < 0$$

$$0 < a < 12$$

Näin on saatu selville, että yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun $0 < a < 12$.

Kohdista 1 ja 2 saamme ratkaisuksi, että funktio f on määritelty koko reaalilukujen joukossa, kun $0 \leq a < 12$.

Vastaus: $0 \leq a < 12$

265

a) Kun $D \geq 0$, niin yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut saadaan ratkaisukaavasta.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

b) Symmetrian perusteella paraabelin huipun x-koordinaatti on paraabelin nollakohtien keskiarvo.

$$x = \frac{1}{2}\left((-\frac{b}{2a} - \cancel{\frac{\sqrt{D}}{2a}}) + (-\frac{b}{2a} + \cancel{\frac{\sqrt{D}}{2a}}) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2b}{2a} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{b}}{a} = -\frac{b}{2a}$$

c) Paraabeli $y = 4x^2 + 124x + 961$.

Lasketaan diskriminantti.
$D = 124^2 - 4 \cdot 4 \cdot 961 = 0$

Koska D = 0, niin huipun x-koordinaatti on
$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{124}{2 \cdot 4} = -15,5$.

Tällöin huipun y-koordinaatti on
$y = 4x^2 + 124x + 961 = 4 \cdot (-15,5)^2 + 124 \cdot (-15,5) + 961 = 0$.

Huippu on (–15,5; 0)

Paraabeli $y = x^2 - 23x + 123$.

Lasketaan diskriminantti.
$D = (-23)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 123 = 37$

Koska D = 37 > 0, niin huipun x-koordinaatti on
$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-23}{2 \cdot 1} = 11,5$.

Tällöin huipun y-koordinaatti on
$y = x^2 - 23x + 123 = 11,5^2 - 23 \cdot 11,5 + 123 = -9,25$.

Huippu on (11,5; –9,25)

Vastaus: b) $x = -\frac{b}{2a}$ c) (–15,5; 0) ja (11,5; –9,25)