

**K1**

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x^3 + x^2 - 3x + 2) + (x^3 - x - 2) &= 2x^3 + x^2 - 3x + 2 + x^3 - x - 2 \\ &= 2x^3 + x^3 + x^2 - 3x - x + 2 - 2 \\ &= 3x^3 + x^2 - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^4 - 5x^3 + 2x) - (-5x^3 - x + 1) &= x^4 - 5x^3 + 2x + 5x^3 + x - 1 \\ &= x^4 - 5x^3 + 5x^3 + 2x + x - 1 \\ &= x^4 + 3x - 1 \end{aligned}$$

Vastaus      a)  $3x^3 + x^2 - 4x$       b)  $x^4 + 3x - 1$

## K2

a)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

$$f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$$

b)  $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x$

$$f(-1) = -(-1)^3 + 4(-1)^2 - (-1) = 1 + 4 + 1 = 6$$

Vastaus      a)  $f(3) = 14$                   b)  $f(-1) = 6$

### K3

$$\begin{aligned} \text{a) } 12 - (a - (a - (2a + 10))) &= 12 - (a - (a - 2a - 10)) \\ &= 12 - (a - a + 2a + 10) \\ &= 12 - 2a - 10 \\ &= -2a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2(5x + x) + 3x - (x - 2) &= 2 \cdot 6x + 3x - x + 2 \\ &= 12x + 2x + 2 \\ &= 14x + 2 \end{aligned}$$

Vastaus      a)  $-2a + 2$               b)  $14x + 2$

## K4

$$\begin{aligned} \text{a) } & [a - (-a - a)] - \{2a - [-a + (a - a)]\} \\ & = [a - (-2a)] - \{2a - [-a + 0]\} \\ & = [a + 2a] - \{2a + a\} \\ & = 3a - 3a \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & [(x - 2x) - (-x)] - \{x - [-(x + x) - x]\} \\ & = [-x - (-x)] - \{x - [-2x - x]\} \\ & = [-x + x] - \{x - [-3x]\} \\ & = 0 - \{x + 3x\} \\ & = -4x \end{aligned}$$

Vastaus      a) 0              b)  $-4x$

## K5

$$\text{a) } \frac{x-4}{2} = 2 - \frac{x-3}{3} \quad | \cdot 6$$

$$6 \cdot \frac{x-4}{2} = 6 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{x-3}{3}$$

$$3(x-4) = 12 - 2(x-3)$$

$$3x - 12 = 12 - 2x + 6$$

$$3x + 2x = 12 + 6 + 12$$

$$5x = 30 \quad | : 5$$

$$x = 6$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} - \frac{2x+6}{4} = x - \frac{1-x}{4} \quad | \cdot 4$$

$$2 - (2x+6) = 4x - (1-x)$$

$$2 - 2x - 6 = 4x - 1 + x$$

$$-2x - 4x - x = -1 - 2 + 6$$

$$-7x = 3 \quad | : (-7)$$

$$x = -\frac{3}{7}$$

Vastaus    a)  $x = 6$     b)  $x = -\frac{3}{7}$

## K6

a)  $2x^5 \cdot 3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x^5 \cdot x^2 = 6x^{5+2} = 6x^7$

b)  $-x^2 \cdot 4x = -4x^2 \cdot x = -4x^{2+1} = -4x^3$

c)  $-3x^6 \cdot (-4x^3) = -3 \cdot (-4) \cdot x^6 \cdot x^3 = 12x^{6+3} = 12x^9$

d)  $4x^5 \cdot (-2x^3) \cdot x^2 = 4 \cdot (-2) \cdot x^5 \cdot x^3 \cdot x^2 = -8x^{5+3+2} = -8x^{10}$

## K7

a)  $-4x(x^2 - 2) = -4x \cdot x^2 + 8x = -4x^3 + 8x$

b)  $x^3(x^4 - 3x) = x^3 \cdot x^4 - x^3 \cdot 3x = x^7 - 3x^4$

c)  $-4x^2(-x^2 + 5x) = 4x^2 \cdot x^2 - 20x^2 \cdot x = 4x^4 - 20x^3$

d)  $x^5(x^4 - 4x^3) = x^5 \cdot x^4 - 4x^5 \cdot x^3 = x^9 - 4x^8$

**K8**

$$\begin{aligned} \text{a) } (x+1)(2x+3) &= x \cdot 2x + x \cdot 3 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 3 \\ &= 2x^2 + 3x + 2x + 3 \\ &= 2x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x+1)(x^2-3) &= 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 3 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot 3 \\ &= 2x^3 - 6x + x^2 - 3 \\ &= 2x^3 + x^2 - 6x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x-2)(-x^2+5x) &= -x \cdot x^2 + x \cdot 5x + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot 5x \\ &= -x^3 + 5x^2 + 2x^2 - 10x \\ &= -x^3 + 7x^2 - 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x+2)(x+2) &= (x+2)^2 \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$



## K9

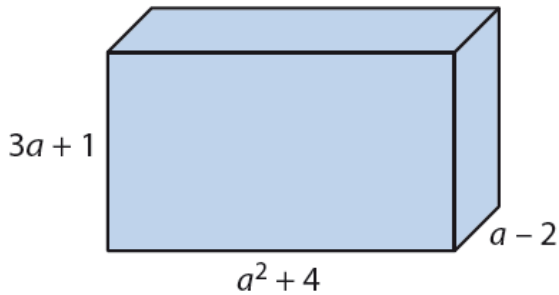
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P(x) &= 2x^3 \cdot 5x^2 \cdot (-4x) \\ &= 2 \cdot 5 \cdot (-4) \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x \\ &= -40x^6 \end{aligned}$$

$$P(-1) = -40 \cdot (-1)^6 = -40 \cdot 1 = -40$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad P(x) &= -x(-2x+1) - (x+1)(-4x+5) \\ &= 2x \cdot x - x \cdot 1 - (-x \cdot 4x + x \cdot 5 - 1 \cdot 4x + 1 \cdot 5) \\ &= 2x^2 - x + 4x^2 - 5x + 4x - 5 \\ &= 6x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

$$P(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 5 = 6 + 2 - 5 = 3$$

Vastaus	a) $P(x) = -40x^6$	b) $P(x) = 6x^2 - 2x - 5$
	$P(-1) = -40$	$P(-1) = 3$

**K10**

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (3a + 1)(a^2 + 4) + 2 \cdot (3a + 1)(a - 2) + 2 \cdot (a^2 + 4)(a - 2) \\ &= 2 \cdot (3a^3 + 12a + a^2 + 4) + 2 \cdot (3a^2 - 6a + a - 2) + 2 \cdot (a^3 - 2a^2 + 4a - 8) \\ &= 6a^3 + 24a + 2a^2 + 8 + 6a^2 - 12a + 2a - 4 + 2a^3 - 4a^2 + 8a - 16 \\ &= 8a^3 + 4a^2 + 22a - 12 \end{aligned}$$

Vastaus Särmiön kokonaispinta-ala  $A = 8a^3 + 4a^2 + 22a - 12$ .

## K11

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x-5)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 \\ &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (-3x+1)^2 &= (-3x)^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 1 + 1^2 \\ &= 9x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x^4-3)^2 &= (x^4)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot (-3) + (-3)^2 \\ &= x^8 - 6x^4 + 9 \end{aligned}$$

## K12

$$\begin{aligned} \text{a) } (-x-4)^2 &= (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot (-4) + (-4)^2 \\ &= x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^3 + x^2)^2 &= (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot x^2 + (x^2)^2 \\ &= x^6 + 2x^5 + x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) \cdot 2 + 2^2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(1 - \frac{1}{4}x\right)^2 &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}x\right) + \left(-\frac{1}{4}x\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2 \end{aligned}$$

### K13

$$\begin{aligned} \text{a) } (x-2)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-2) + 3 \cdot x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-x-3)^3 &= (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-x) \cdot (-3)^2 + (-3)^3 \\ &= -x^3 - 9x^2 - 27x - 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (2x+1)^3 &= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

## K14

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 6x + a &= x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + a \\ &= (x - 3)^2, \text{ kun } a = (-3)^2 = 9 \end{aligned}$$

Voi myös päätellä toisin:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + a &= (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + a \\ &= (-x + 3)^2, \text{ kun } a = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 + 10x + a &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + a \\ &= (x + 5)^2, \text{ kun } a = 5^2 = 25 \end{aligned}$$

Voi myös päätellä toisin:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + a &= (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot (-5) + a \\ &= (-x - 5)^2, \text{ kun } a = (-5)^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4x^2 - ax + 49 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) + (-7)^2 \\ &= (2x - 7)^2, \text{ kun } -\frac{a}{4} = -7 \text{ eli } a = 28 \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} 4x^2 - ax + 49 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) + 7^2 \\ &= (2x + 7)^2, \text{ kun } -\frac{a}{4} = 7 \text{ eli } a = -28 \end{aligned}$$

Voi myös päätellä toisin:

$$\begin{aligned}4x^2 - ax + 49 &= (-2x)^2 + 2 \cdot (-2x) \cdot \frac{a}{4} + 7^2 \\ &= (-2x + 7)^2, \text{ kun } \frac{a}{4} = 7 \text{ eli } a = 28\end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}4x^2 - ax + 49 &= (-2x)^2 + 2 \cdot (-2x) \cdot \frac{a}{4} + (-7)^2 \\ &= (-2x - 7)^2, \text{ kun } \frac{a}{4} = -7 \text{ eli } a = -28\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d) } ax^2 + 24x + 36 &= (\sqrt{ax})^2 + 2 \cdot \sqrt{ax} \cdot \frac{12}{\sqrt{a}} + 6^2 \quad | \text{Oltava } a > 0 \\ &= (\sqrt{ax} + 6)^2 \\ &= (2x + 6)^2, \text{ kun } \frac{12}{\sqrt{a}} = 6 \text{ eli } \sqrt{a} = 2 \text{ eli } a = 4\end{aligned}$$

Voi myös päätellä toisin ( $a > 0$ ):

$$\begin{aligned}ax^2 + 24x + 36 &= (-\sqrt{ax})^2 + 2 \cdot (-\sqrt{ax}) \cdot \left(-\frac{12}{\sqrt{a}}\right) + (-6)^2 \\ &= (-2x - 6)^2, \text{ kun } -\frac{12}{\sqrt{a}} = -6 \text{ eli } \sqrt{a} = 2 \text{ eli } a = 4\end{aligned}$$

- Vastaus
- a) Kun  $a = 9$ , saadaan  $(x - 3)^2$  (tai  $(-x + 3)^2$ )
  - b) Kun  $a = 25$ , saadaan  $(x + 5)^2$  (tai  $(-x - 5)^2$ )
  - c) Kun  $a = 28$ , saadaan  $(2x - 7)^2$  (tai  $(-2x + 7)^2$ )  
Kun  $a = -28$ , saadaan  $(2x + 7)^2$  (tai  $(-2x - 7)^2$ )
  - d) Kun  $a = 4$ , saadaan  $(2x + 6)^2$  (tai  $(-2x - 6)^2$ )

## K15

$$\begin{aligned} \text{a) } (-a - b)^2 &= (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot (-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (a + b)^2 \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (-a + b)^2 &= (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 \\ &= (a - b)^2 \quad \square \end{aligned}$$



## K16

a)  $(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$

b)  $(3x+2)(3x-2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$

c)  $(2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

d)  $(4x+3)(4x-3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$

**K17**

a)  $(2+x)(2-x) = 2^2 - x^2 = 4 - x^2$

b)  $(y+x)(x-y) = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

c)  $(5-2x)(5+2x) = 5^2 - (2x)^2 = 25 - 4x^2$

d)  $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}x^2 - \frac{1^2}{2^2} = \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}$

## K18

a)  $(2x-1)(2+4x)-(x-2)^2$

$$= 2x \cdot 2 + 2x \cdot 4x - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4x - (x^2 + 2 \cdot x \cdot (-2) + (-2)^2)$$
$$= 4x + 8x^2 - 2 - 4x - x^2 + 4x - 4$$
$$= 7x^2 + 4x - 6$$

b)  $2x^2(x-3)^2 - (-x^2)(x^2-4x)(x^2+4x)$

$$= 2x^2(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2) + x^2((x^2)^2 - (4x)^2)$$
$$= 2x^2(x^2 - 6x + 9) + x^2(x^4 - 16x^2)$$
$$= 2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot 6x + 2x^2 \cdot 9 + x^2 \cdot x^4 - x^2 \cdot 16x^2$$
$$= 2x^4 - 12x^3 + 18x^2 + x^6 - 16x^4$$
$$= x^6 - 14x^4 - 12x^3 + 18x^2$$

Vastaus      a)  $7x^2 + 4x - 6$   
                  b)  $x^6 - 14x^4 - 12x^3 + 18x^2$

## K19

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2 - 25}{2x - 10} &= \frac{x^2 - 5^2}{2(x - 5)} \\ &= \frac{(x + 5) \cancel{(x - 5)}}{2 \cancel{(x - 5)}} \\ &= \frac{x + 5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1 - 4x^2}{1 + 2x} &= \frac{1^2 - (2x)^2}{1 + 2x} \\ &= \frac{\cancel{(1 + 2x)}(1 - 2x)}{\cancel{1 + 2x}} \\ &= 1 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{24x - 18}{16x^2 - 9} &= \frac{6 \cdot 4x - 6 \cdot 3}{(4x)^2 - 3^2} \\ &= \frac{6 \cdot \cancel{(4x - 3)}}{(4x + 3) \cancel{(4x - 3)}} \\ &= \frac{6}{4x + 3} \end{aligned}$$

Vastaus      a)  $\frac{x+5}{2}$       b)  $1-2x$       c)  $\frac{6}{4x+3}$

## K20

- a)  $\sqrt{4} = 2$ , koska  $2 \geq 0$  ja  $2^2 = 4$ .
- b)  $\sqrt{36} = 6$ , koska  $6 \geq 0$  ja  $6^2 = 36$ .
- c)  $\sqrt{17}$  ( $\approx 4,123\dots$ ).
- d)  $\sqrt{-16}$  ei määritelty, koska  $-16 < 0$ .

- Vastaus
- a)  $\sqrt{4} = 2$
- b)  $\sqrt{36} = 6$
- c)  $\sqrt{17}$  ( $\approx 4,123\dots$ )
- d)  $\sqrt{-16}$  ei määritelty

## K21

a)  $x^2 = 64$

$$x = \pm\sqrt{64}$$

$$x = -8 \text{ tai } x = 8$$

b)  $2x^2 - 3 = 5$

$$2x^2 = 5 + 3 \quad | :2$$

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 2$$

c)  $3x^2 - 15 = 0$

$$3x^2 = 15 \quad | :3$$

$$x^2 = \frac{15}{3}$$

$$x^2 = 5$$

$$x = -\sqrt{5} \text{ tai } x = \sqrt{5}$$

Vastaus a)  $x = -8 \text{ tai } x = 8$

b)  $x = -2 \text{ tai } x = 2$

c)  $x = -\sqrt{5} \text{ tai } x = \sqrt{5}$

## K22

a)  $(\sqrt{3})^2 = 3$

b)  $(-2\sqrt{6})^2 = (-2)^2 \cdot (\sqrt{6})^2 = 4 \cdot 6 = 24$

c)  $3 \cdot (\sqrt{2})^2 - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$

d)  $2a - \sqrt{a^2} = 2a - \underbrace{|a|}_{<0} \quad |a < 0$

$$= 2a - (-a)$$

$$= 2a + a$$

$$= 3a$$

## K23

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{12} - \sqrt{2} - \sqrt{27} &= \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{2} - \sqrt{9 \cdot 3} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - 3\sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4\sqrt{200} - 3\sqrt{32} &= 4 \cdot \sqrt{100 \cdot 2} - 3 \cdot \sqrt{16 \cdot 2} \\ &= 4 \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \\ &= 4 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \\ &= 40\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ &= 28\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{15}(\sqrt{10} - \sqrt{20}) &= \sqrt{15} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{15} \cdot \sqrt{20} \\ &= \sqrt{15 \cdot 10} - \sqrt{15 \cdot 20} \\ &= \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} - \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 2} - \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{6} - 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{6} - 10\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{d) } \sqrt{4+16} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{30} + 2\sqrt{45} &= \sqrt{20} - \sqrt{6 \cdot 30} + 2 \cdot \sqrt{9 \cdot 5} \\
 &= \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 5} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5} - \sqrt{6^2 \cdot 5} + 6\sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

- Vastaus
- a)  $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$
  - b)  $28\sqrt{2}$
  - c)  $5\sqrt{6} - 10\sqrt{3}$
  - d)  $2\sqrt{5}$

## K24

$$\begin{aligned} \text{a) } (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) &= 2^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 4 - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 2 + 2\sqrt{6} + 3 \\ &= 5 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Vastaus    a)  $-1$   
              b)  $5 + 2\sqrt{6}$

## K25

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{6 \cdot 3}{2}} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{\frac{25}{9}} &= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{5\frac{5}{4}} &= \sqrt{\frac{20+5}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sqrt{\sqrt{4} - \sqrt{\frac{9}{16}}} &= \sqrt{2 - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}} = \sqrt{2 - \frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{1\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vastaus    a) 3    b)  $\frac{3}{5}$     c)  $2\frac{1}{2}$     d)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

## K26

a) Väite  $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$  ei pidä paikkaansa sillä neliöjuuren arvo  $1-\sqrt{2} = \sqrt{1}-\sqrt{2} < 0$ , mikä ei juuren määritelmän mukaan ole mahdollista.

b)  $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$  pitää paikkansa, sillä

1)  $1+\sqrt{2} \geq 0$

2)  $(1+\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$   
 $= 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2}$

Vastaus a) ei ole b) on

## K27

a)  $\sqrt[7]{-2187} = -3$ , sillä  $(-3)^7 = -2187$ .

Yhtälö  $x^7 = -2187$  toteutuu, kun  $x = -3$ .

(Ratkaisuja on yksi, koska eksponentti 7 on pariton.)

b)  $\sqrt[4]{6561} = 9$ , sillä  $9 \geq 0$  ja  $9^4 = 6561$ .

Yhtälö  $x^4 = 6561$  toteutuu, kun  $x = -9$  tai  $x = 9$ .

(Ratkaisuja on kaksi koska eksponentti 4 on parillinen.)

## K28

a)  $3x^4 = 48 \quad | :3$

$$x^4 = 16$$

$$x = -\sqrt[4]{16} = -2 \text{ tai } x = \sqrt[4]{16} = 2$$

b) c   cis   d   dis   e   f   fis   g   gis   a   ais   h   c   ...

$f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13} \quad \dots$

c)  $f_n = f_1 \cdot q^{n-1}$

Vastaus a)  $f_{13} = f_1 \cdot q^{12}$

$$2 \cdot f_1 = f_1 \cdot q^{12} \quad | : f_1 (\neq 0)$$

$$2 = q^{12}$$

$$q = \pm \sqrt[12]{2} \quad | q > 0$$

$$q = \sqrt[12]{2}$$

b)  $f_8$  c)  $f_8 = f_1 \cdot q^7$

$$\left| \begin{array}{l} f_1 = 261,1 \text{ Hz} \\ q = \sqrt[12]{2} \end{array} \right.$$

$$= 261,6 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^7$$

$$= 391,957\dots$$

$$\approx 392,0 \text{ (Hz)}$$

## K29

Väkiluku vuoden 2012 kesällä 600 000.

Väkiluku vuoden 2015 kesällä 627 000.

a) Väkiluku kasvaa vuodessa  $k$ -kertaiseksi. Saadaan yhtälö

$$k^3 \cdot 600\,000 = 627\,000$$

$$k^3 = \frac{627\,000}{600\,000}$$

$$k^3 = 1,045$$

$$k = \sqrt[3]{1,045}$$

Vuoden 2050 kesällä aikaa on kulunut 35 vuotta vuoden 2015 kesästä, joten väkiluku on silloin

$$k^{35} \cdot 627\,000 = \left(\sqrt[3]{1,045}\right)^{35} \cdot 627\,000 \approx 1\,050\,000$$

- b) Vuoden 2015 jälkeen väkiluku kasvaa vuodessa  $p$ -kertaiseksi.  
Saadaan yhtälö

$$p^{15} \cdot 627\,000 = 900\,000$$

$$p^{15} = \frac{900\,000}{627\,000} = \frac{900}{627}$$

$$p = \sqrt[15]{\frac{900}{627}} = 1,02438\dots = 102,438\dots \%$$

Vuotuinen väkiluvun kasvuprosentti on  $2,438\dots \% \approx 2,44 \%$ .

- Vastaus a) Vuoden 2015 kesällä asukasluku on 1 050 000 henkeä.  
b) Väkiluvun vuotuisen kasvun pitäisi olla  $2,44 \%$ .



### K30

c   cis   d   dis   e   f   fis   g   gis   a   ais   h   c   ...  
 $f_1$   $f_2$   $f_3$   $f_4$   $f_5$   $f_6$   $f_7$   $f_8$   $f_9$   $f_{10}$   $f_{11}$   $f_{12}$   $f_{13}$  ...

Taajuudet muodostavat geometrisen jonon, suhdelukuna  $q$ .

Tiedetään, että  $f_n = f_1 \cdot q^{n-1}$  ja että  $f_{13} = 2 \cdot f_1$ . Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} f_{13} &= f_1 \cdot q^{12} \\ 2 \cdot f_1 &= f_1 \cdot q^{12} && | : f_1 (\neq 0) \\ 2 &= q^{12} \\ q &= \pm \sqrt[12]{2} && | q > 0 \\ q &= \sqrt[12]{2} \end{aligned}$$

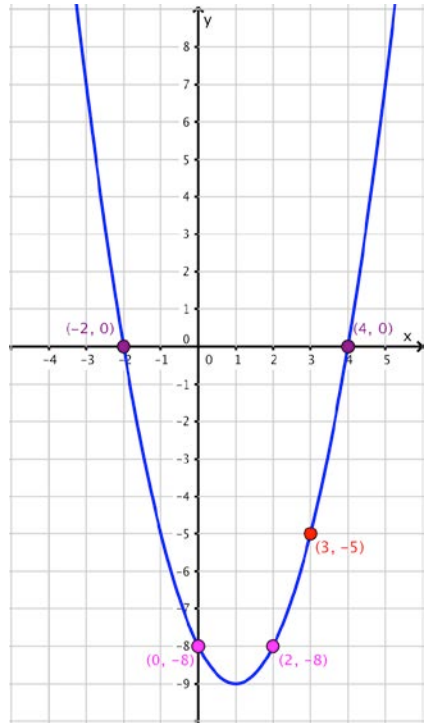
Selvitetään sävelen g taajuus  $f_8$ .

$$\begin{aligned} f_8 &= f_1 \cdot q^7 && \left| \begin{array}{l} f_1 = 261,1 \text{ Hz} \\ q = \sqrt[12]{2} \end{array} \right. \\ &= 261,6 \cdot \left( \sqrt[12]{2} \right)^7 \\ &= 391,957... \\ &\approx 392,0 \text{ (Hz)} \end{aligned}$$

Vastaus    392,0 Hz

## K31

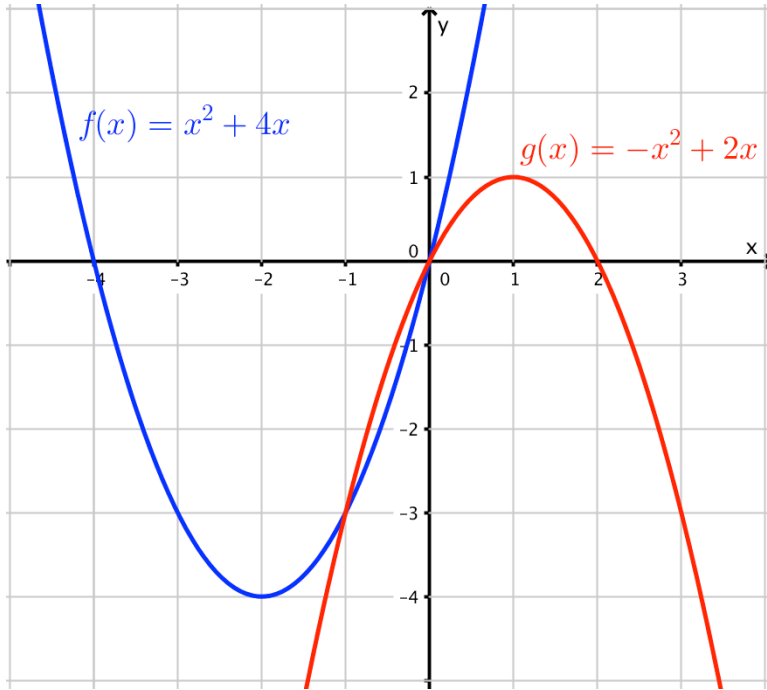
- a) Funktion kuvaaja kulkee pisteen  $(3, -5)$  kautta, joten  $f(3) = -5$ .
- b) Funktion kuvaaja kulkee pisteiden  $(0, -8)$  ja  $(2, -8)$  kautta, joten  $f(x) = -8$ , kun  $x = 0$  tai  $x = 2$ .
- c) Funktion kuvaaja leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $x = -2$  ja  $x = 4$ , joten funktion nollakohdat ovat  $-2$  ja  $4$ .
- d) Funktion arvot ovat negatiivisia niissä kohdissa, joissa sen kuvaaja on  $x$ -akselin alapuolella. Funktion  $f$  arvot ovat negatiivisia, kun  $-2 < x < 4$ .



Vastaus: a)  $f(3) = -5$   
c)  $x = -2$  tai  $x = 4$

b)  $x = 0$  tai  $x = 2$   
d)  $-2 < x < 4$

### K32



- a) Funktion  $f$  arvo on negatiivinen, kun  $-4 < x < 0$ .
- b) Funktion  $g$  arvo on negatiivinen, kun  $x < 0$  tai  $x > 2$ .
- c) Yhtälön  $x^2 + 4x = 0$  juuret ovat  $f(x) = x^2 + 4x$  nollakohdat.  
Juuret ovat  $x = -4$  ja  $x = 0$ .
- d) Yhtälön  $-x^2 + 2x = 0$  juuret ovat  $g(x) = -x^2 + 2x$  nollakohdat.  
Juuret ovat  $x = 0$  ja  $x = 2$ .

Vastaus:      a)  $-4 < x < 0$                       b)  $x < 0$  tai  $x > 2$   
                    c)  $x = -4$  ja  $x = 0$                       d)  $x = 0$  ja  $x = 2$

### K33

Koska pallo lentää 21,0 m päähän, niin lentorata päättyy pisteeseen (21, 0).

Sijoitetaan  $x = 21$  ja  $y = 0$  paraabelin yhtälöön ja ratkaistaan  $v$ .

$$y = x - \frac{10}{v^2} \cdot x^2$$

$$0 = 21 - \frac{10}{v^2} \cdot 21^2$$

$$-\frac{4410}{v^2} + 21 = 0 \quad | \cdot v^2$$

$$-4410 + 21v^2 = 0$$

$$21v^2 = 4410 \quad | : 21$$

$$v^2 = 210$$

$$v = \sqrt{210} \quad \text{tai} \quad v = -\sqrt{210}$$

Koska nopeus on positiivinen, niin  $v = \sqrt{210} = 14,491... \approx 14$  (m/s).

Vastaus: 14 m/s

#### **Huomautus:**

Nopeuden  $v$  arvon voi ratkaista myös käyttämällä lentoradan lakipistettä (10,5; 5). Tällöin nopeudeksi saadaan  $v = 14,158... \text{ m/s} \approx 14 \text{ m/s}$ .

### K34

a)  $2x^2 = 2x + 4$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad a = 2, b = -2, c = -4$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

$$x = \frac{2-6}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+6}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

b)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x - 1 = 0 \quad | \cdot 4$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \quad a = 2, b = 7, c = -4$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{-7-9}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7+9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Vastaus: a)  $x = -1$  tai  $x = 2$       b)  $x = -4$  tai  $x = \frac{1}{2}$

**K35**

$$\text{a) } 2x(x-4)+3=(x-3)^2-3x$$

$$2x^2-8x+3=x^2-6x+9-3x$$

$$2x^2-x^2-8x+9x+3-9=0$$

$$x^2+x-6=0 \quad a=1, b=1, c=-6$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{b) } 2x^3-2x(x-3)(x+3)+4x=14-(2x-4)^2$$

$$2x^3-2x(x^2-9)+4x=14-(4x^2-16x+16)$$

$$2x^3-2x^3+18x+4x=14-4x^2+16x-16$$

$$4x^2+22x-16x+2=0$$

$$4x^2+6x+2=0 \quad a=4, b=6, c=2$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{8} = \frac{-6 \pm 2}{8}$$

$$x = \frac{-6-2}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6+2}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Vastaus:    a)  $x = -3$  tai  $x = 2$             b)  $x = -1$  tai  $x = -\frac{1}{2}$

### K36

a)  $f(s) = 1$

$$-4s^2 + 3s + 1 = 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$-4s^2 + 3s = 0 \quad a = -4, b = 3, c = 0$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-3 \pm 3}{-8}$$

$$s = \frac{-3-3}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad s = \frac{-3+3}{-8} = \frac{0}{-8} = 0$$

b)  $f(s) = 0$

$$-4s^2 + 3s + 1 = 0 \quad a = -4, b = 3, c = 1$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-3 \pm 5}{-8}$$

$$s = \frac{-3-5}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3+5}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

c)  $f(s) = 2$

$$-4s^2 + 3s + 1 = 2$$

$$-4s^2 + 3s - 1 = 0 \quad a = -4, b = 3, c = -1$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-4)} = \frac{10 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Koska lukua  $\sqrt{-7}$  ei ole määritelty, yhtälöllä ei ole juuria. Täten funktion  $f$  arvo ei ole 2 millään muuttujan  $s$  arvolla.

Vastaus: a)  $s = 0$  tai  $s = \frac{3}{4}$

b)  $s = -\frac{1}{4}$  tai  $s = 1$

c) Ei millään muuttujan  $s$  arvolla.



### K37

Sijoitetaan  $x = \sqrt{3}$  yhtälöön ja ratkaistaan vakion  $a$  arvo.

$$x^2 + ax - 2a^2 = 0$$

$$(\sqrt{3})^2 + a \cdot \sqrt{3} - 2a^2 = 0$$

$$-2a^2 + \sqrt{3} \cdot a + 3 = 0$$

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tai} \quad a = \sqrt{3}$$

Muodostetaan arvoa  $a = \sqrt{3}$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 + \sqrt{3}x - 2(\sqrt{3})^2 = 0$$

$$x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$$

Ratkaistaan laskimella.

$$x = -2\sqrt{3} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{3}$$

Toinen juuri on siis  $-2\sqrt{3}$ .

Muodostetaan arvoa  $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

Ratkaistaan laskimella.

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{3}$$

Toinen juuri on siis  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Vastaus: Kun  $a = \sqrt{3}$ , niin toinen juuri on  $x = -2\sqrt{3}$ .

Kun  $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , niin toinen juuri on  $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### K38

a)  $2x^2 - x \leq x + 4$

$$2x^2 - 2x - 4 \leq 0$$

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$  nollakohdat.

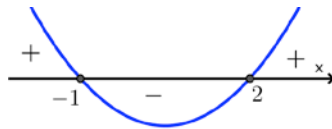
$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad a = 2, \quad b = -2, \quad c = -4$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 6}{4}$$

$$x = \frac{2-6}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+6}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion  $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö  $2x^2 - 2x - 4 \leq 0$  toteutuu, kun  $-1 \leq x \leq 2$ .

b)  $-x^2 + 2x - 1 < 0$

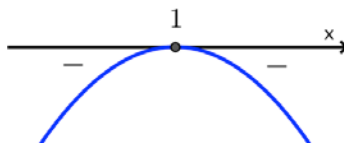
Ratkaistaan funktion  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$  nollakohdat.

$$-x^2 + 2x - 1 = 0 \quad a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$  kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on  $x = 1$ .



Epäyhtälö  $-x^2 + 2x - 1 < 0$  toteutuu, kun  $x \neq 1$ .

c)

$$(x-1)(x+1) + x + 7 \geq 3 - (x-1)$$

$$x^2 - 1 + x + 7 \geq 3 - x + 1$$

$$x^2 + x + x + 6 - 4 \geq 0$$

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0$$

Ratkaistaan funktion  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  nollakohdat.

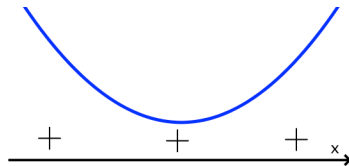
$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad a = 1, \quad b = 2, \quad c = 2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

ei ratkaisua

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia.



Epäyhtälö  $x^2 + 2x + 2 \geq 0$  toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla.

Vastaus:

a)  $-1 \leq x \leq 2$

b)  $x \neq 1$

c) Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla

### K39

Koska neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille, niin funktio  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$  on määritelty, kun  $x^2 - x - 2 \geq 0$ .

Ratkaistaan funktion  $x^2 - x - 2$  nollakohdat.

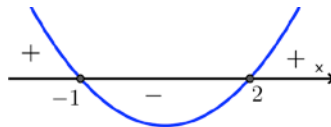
$$x^2 - x - 2 = 0 \quad a = 1, \quad b = -1, \quad c = -2$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään sen merkit.

Funktion  $x^2 - x - 2$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäytälö  $x^2 - x - 2 \geq 0$  toteutuu, kun  $x \leq -1$  tai  $x \geq 2$ .

Funktio  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$  on siis määritelty, kun  $x \leq -1$  tai  $x \geq 2$ .

Vastaus:  $x \leq -1$  tai  $x \geq 2$

## K40

Luvun  $x$  neliön  $x^2$  ja luvun  $x$  erotuksen  $x^2 - x$  tulee olla enintään 70. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$x^2 - x \leq 70$$

$$x^2 - x - 70 \leq 0$$

$$-7,881... \leq x \leq 8,881...$$

Ehdon täyttävät positiiviset kokonaisluvut ovat siis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8.

Vastaus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8

## K41

- a) Merkitään joen suuntaisen sivun pituutta kirjaimella  $y$  (m).

Aitaa on käytettävissä 106 m.

Ratkaistaan  $y$ .

$$2x + y = 106$$

$$y = 106 - 2x$$

Muodostetaan pinta-alan lauseke.

$$A = x \cdot y = x(106 - 2x) = 106x - 2x^2$$

- b) Muodostetaan pinta-alan  $1040 \text{ m}^2$  avulla yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$106x - 2x^2 = 1040$$

$$-2x^2 + 106x - 1040 = 0$$

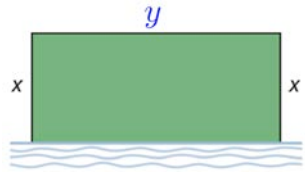
$$x = 13 \quad \text{tai} \quad x = 40$$

Kun  $x = 13$ , niin  $y = 106 - 2x = 106 - 2 \cdot 13 = 80$ .

Kun  $x = 40$ , niin  $y = 106 - 2x = 106 - 2 \cdot 40 = 26$ .

Tontit mitat ovat siis 13 m ja 80 m tai 40 m ja 26 m.

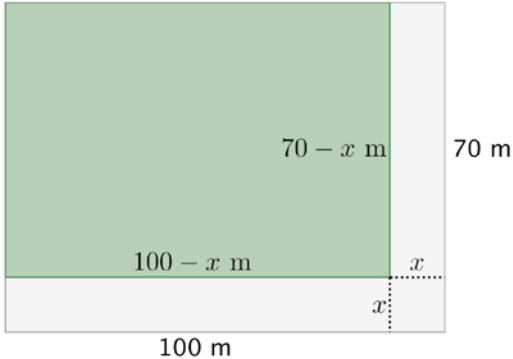
- Vastaus: a) sivun pituus  $106 - 2x$ ,  
pinta-ala  $x(106 - 2x) = 106x - 2x^2$ .  
b) 13 m ja 80 m tai 40 m ja 26 m





## K42

Piirretään kuva. Merkitään hakkuualueen leveyttä kirjaimella  $x$ .



Sisäosa on suorakulmio, jonka pituus on  $100 - x$  (m) ja leveys  $70 - x$  (m). Tämän alueen pinta-ala saadaan, kun alkuperäisestä metsän pinta-alasta vähennetään hakatun alueen pinta-ala.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan hakkuualueen leveys  $x$ .

$$(100 - x)(70 - x) = 100 \cdot 70 - 2325$$

$$x^2 - 170x + 7000 = 4675$$

$$x^2 - 170x + 2325 = 0$$

$$x = 15 \quad \text{tai} \quad x = 155$$

Hakkuualueen leveys ei voi olla yli 70 m, joten leveys  $x = 15$  m.

Vastaus: 15 m

## K43

Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ , jolloin taimenkanta tulee vuosittain  $q$ -kertaiseksi.

Vuonna 2014 taimenia oli 3000.

Vuonna 2015 taimenmäärä oli  $q$ -kertaistunut ja lisäksi istutettiin 1500 taimenta, tällöin taimenien määrä oli  $3000 \cdot q + 1500$ .

Vuonna 2016 taimenien määrä oli jälleen  $q$ -kertaistunut, jolloin taimenien määrä oli  $(3000 \cdot q + 1500) \cdot q = 3000q^2 + 1500q$ .

Vuonna 2016 taimenia oli 3300. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin  $q$ .

$$3000q^2 + 1500q = 3300$$

$$3000q^2 + 1500q - 3300 = 0$$

$$q = -1,3281... \quad \text{tai} \quad x = 0,8281...$$

Muutoskerroimen arvo on positiivinen, joten  $q = 0,8281... = 82,81... \%$ .

Taimenkanta pienenee siis vuosittain  $100 \% - 82,81... \% = 17,18... \% \approx 17 \%$ .

Vastaus:            17 %

## K44

a)  $3x^2 - 4x + 2 = 0$        $a = 3, b = -4, c = 2$

Lasketaan diskriminantin arvo.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 \end{aligned}$$

Koska diskriminantin arvo on negatiivinen, niin yhtälöllä ei ole yhtään juurta.

b)  $5x - 4 = x^2$   
 $-x^2 + 5x - 4 = 0$        $a = -1, b = 5, c = -4$

Lasketaan diskriminantin arvo.

$$D = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 25 - 16 = 9$$

Koska diskriminantin arvo on positiivinen, niin yhtälöllä on kaksi juurta.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } (2x-1)(1+2x) - 2x^2 - 8x + 11 &= (x-1)^2 \\
 (2x-1)(2x+1) - 2x^2 - 8x + 11 &= x^2 - 2x + 1 \\
 4x^2 - 1 - 2x^2 - 8x + 11 &= x^2 - 2x + 1 \\
 2x^2 - x^2 - 8x + 2x + 10 - 1 &= 0 \\
 x^2 - 6x + 9 &= 0
 \end{aligned}$$

Lasketaan diskriminantin arvo.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Koska diskriminantin arvo on nolla, niin yhtälöllä on yksi juuri.

Vastaus:      a) ei yhtään juurta                      b) kaksi juurta  
                   c) yksi juuri

## K45

- a) Funktio saa vain positiivisia arvoja, kun sen kuvaaja on kokonaan  $x$ -akselin yläpuolella. Funktion  $f(x) = 2x^2 - 4ax + 2$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se on kokonaan  $x$ -akselin yläpuolella, kun sillä ei ole yhtään nollakohtaa.

Siis yhtälöllä  $2x^2 - 4ax + 2 = 0$  ei saa olla yhtään juurta.

Lasketaan diskriminantti.

$$D = (-4a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16a^2 - 16$$

Diskriminantin tulee olla negatiivinen eli pitää ratkaista epäyhtälö  $16a^2 - 16 < 0$ .

Ratkaistaan funktion  $16a^2 - 16$  nollakohdat.

$$16a^2 - 16 = 0$$

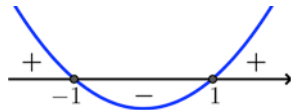
$$16a^2 = 16 \quad | :16$$

$$a^2 = 1$$

$$a = 1 \quad \text{tai} \quad a = -1$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja ja päätellään merkit.

Funktion  $16a^2 - 16$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö  $16a^2 - 16 < 0$  toteutuu, kun  $-1 < a < 1$ . Funktio  $f(x) = 2x^2 - 4ax + 2$  saa vain positiivisia arvoja, kun  $-1 < a < 1$ .

b) Funktio  $g(x) = ax^2 + 2x - 4$  on toisen asteen funktio vain, kun  $a \neq 0$ .

Arvoa  $a = 0$  vastaava funktio  $g(x) = 2x - 4$  on ensimmäisen asteen funktio, joka saa myös negatiivisia arvoja (esimerkiksi  $g(0) = -4$ ).

Oletetaan, että  $a \neq 0$ . Funktion  $g(x) = ax^2 + 2x - 4$  kuvaaja voi olla kokonaan  $x$ -akselin yläpuolella vain, jos se on ylöspäin aukeava paraabeli. Pitää siis olla  $a > 0$ .

Lasketaan yhtälön  $ax^2 + 2x - 4 = 0$  diskriminantti.

$$D = 2^2 - 4 \cdot a \cdot (-4) = 16a + 4$$

Yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Muodostetaan epäyhtälö.

$$16a + 4 < 0$$

$$16a < -4 \quad | :16$$

$$a < -\frac{1}{4}$$

Koska piti olla  $a > 0$ , niin ratkaisu ei kelpaa. Siis funktion  $g(x) = ax^2 + 2x - 4$  kuvaaja ei ole kokonaan  $x$ -akselin yläpuolella millään vakion  $a$  arvolla.

Vastaus: a)  $-1 < a < 1$

b) Ei millään  $a$ :n arvolla.

## K46

Sievennetään yhtälöä.

$$tx^2 + 2tx + 2 = \frac{5}{4}tx^2 + tx + \frac{1}{2}$$

$$tx^2 - \frac{5}{4}tx^2 + 2tx - tx + 2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{4}tx^2 + tx + \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$-tx^2 + 4tx + 6 = 0 \quad a = -t, \quad b = 4t, \quad c = 6$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö vain, kun  $t \neq 0$ . Pitää siis tutkia erikseen tapaukset  $t = 0$  ja  $t \neq 0$ .

1) Oletetaan ensin, että  $t = 0$ .

Muodostetaan arvoa  $t = 0$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$-tx^2 + 4tx + 6 = 0$$

$$-0 \cdot x^2 + 4 \cdot 0 \cdot x + 6 = 0$$

$$6 = 0$$

epätosi

Yhtälö on identtisesti epätosi eli ei toteudu millään muuttujan  $x$  arvolla.

2) Oletetaan seuraavaksi, että  $t \neq 0$ .

Lasketaan diskriminantti.

$$D = (4t)^2 - 4 \cdot (-t) \cdot 6 = 16t^2 + 24t$$

Yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun diskriminantti on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $t$ .

$$16t^2 + 24t = 0$$

$$t = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad t = 0$$

Arvo  $t = 0$  voidaan hylätä alkuoletuksen  $t \neq 0$  perusteella.

Muodostetaan arvoa  $t = -\frac{3}{2}$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$-tx^2 + 4tx + 6 = 0$$

$$-\left(-\frac{3}{2}\right)x^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)x + 6 = 0$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$x = 2$$

Näin on saatu selville, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri, kun

$t = -\frac{3}{2}$  ja tämä juuri on  $x = 2$ .

Vastaus:     Kun  $t = -\frac{3}{2}$ , niin  $x = 2$ .



## K47

Sievennetään yhtälöä.

$$x(x+1)+7=\frac{3}{4}x^2-t(x+1)$$

$$x^2+x+7=\frac{3}{4}x^2-tx-t$$

$$x^2-\frac{3}{4}x^2+x+tx+7+t=0$$

$$\frac{1}{4}x^2+(t+1)x+t+7=0 \quad a=\frac{1}{4}, \quad b=t+1, \quad c=t+7$$

Lasketaan diskriminantti.

$$D=(t+1)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(t+7)=t^2+2t+1-t-7=t^2+t-6$$

Yhtälöllä on kaksi juurta, kun diskriminantti on positiivinen. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan  $t$ .

$$t^2+t-6>0$$

$$t<-3 \quad \text{tai} \quad t>2$$

Vastaus:  $t<-3$  tai  $t>2$

## K48

a)  $x^2 + x = x(x+1)$

b)  $3x^4 - 5x^3 = x^3(3x - 5)$

c)  $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = (3x + 1)^2$

d)  $25x^2 - 20x + 4 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot (-2) + (-2)^2 = (5x - 2)^2$

Vastaus: a)  $x(x+1)$

b)  $x^3(3x - 5)$

c)  $(3x + 1)^2$

d)  $(5x - 2)^2$

## K49

a)  $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1)$

b)  $9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x+1)(3x-1)$

c)  $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = x^2(3x-1) + 3(3x-1)$   
 $= (3x-1)(x^2 + 3)$

d)  $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = x^2(x-2) + 4(x-2)$   
 $= (x-2)(x^2 + 4)$

Vastaus:      a)  $(x+1)(x-1)$                       b)  $(3x+1)(3x-1)$   
                  c)  $(3x-1)(x^2 + 3)$                     d)  $(x-2)(x^2 + 4)$

## K50

$$\text{a) } x^5 - 9x^3 = x^3(x^2 - 9)$$

$$= x^3(x^2 - 3^2)$$

$$= x^3(x+3)(x-3)$$

$$\text{b) } x^3 - 2x^2 - 16x + 32 = x^2(x-2) - 16(x-2)$$

$$= (x-2)(x^2 - 16)$$

$$= (x-2)(x+4)(x-4)$$

$$\text{c) } 4x^2(x+1)^3 - 2x^3(x+1)^2 = 2x^2(x+1)^2(2(x+1) - x)$$

$$= 2x^2(x+1)^2(x+2)$$

$$\text{d) } xy^4 - x^5 = x(y^4 - x^4)$$

$$= x((y^2)^2 - (x^2)^2)$$

$$= x(y^2 + x^2)(y^2 - x^2)$$

$$= x(y^2 + x^2)(y+x)(y-x)$$

Vastaus:

$$\text{a) } x^3(x+3)(x-3)$$

$$\text{b) } (x-2)(x+4)(x-4)$$

$$\text{c) } 2x^2(x+1)^2(x+2)$$

$$\text{d) } x(y^2 + x^2)(y+x)(y-x)$$

## K51

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^5 - x^3}{x-1} &= \frac{x^3(x^2 - 1)}{x-1} \\ &= \frac{x^3(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \\ &= x^3(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} &= \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot (-4) + (-4)^2}{x^2 - 4^2} \\ &= \frac{(x-4)\cancel{^2}}{(x+4)\cancel{(x-4)}} \\ &= \frac{x-4}{x+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2} \\ &= \frac{(x+1)\cancel{^3}}{\cancel{(x+1)^2}} \\ &= x+1 \end{aligned}$$

Vastaus:    a)  $x^3(x+1)$                       b)  $\frac{x-4}{x+4}$                       c)  $x+1$

## K52

a)  $(x+2)(x^2-9)=0$

$$x+2=0 \quad \text{tai} \quad x^2-9=0$$

$$x=-2 \quad \quad \quad x^2=9$$

$$x=3 \quad \text{tai} \quad x=-3$$

b)  $3x^3-12x^2-15x=0$

$$3x(x^2-4x-5)=0$$

$$3x=0 \quad \text{tai} \quad x^2-4x-5=0 \quad \quad \quad a=1, \quad b=-4, \quad c=-5$$

$$x=0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{c) } 2x^4 - 4x^3 = -16x + 32$$

$$2x^4 - 4x^3 + 16x - 32 = 0$$

$$2x^3(x-2) + 16(x-2) = 0$$

$$(x-2)(2x^3 + 16) = 0$$

$$x-2=0 \quad \text{tai} \quad 2x^3 + 16 = 0$$

$$x=2 \quad 2x^3 = -16 \quad | :2$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

- Vastaus: a)  $x = -3, x = -2$  tai  $x = 3$   
b)  $x = -1, x = 0$  tai  $x = 5$   
c)  $x = -2$  tai  $x = 2$

## K53

a)  $2x^3 - 6x^2 - 8x + 24 = 0$

$$2x^2(x-3) - 8(x-3) = 0$$

$$(x-3)(2x^2 - 8) = 0$$

$$x-3=0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 - 8 = 0$$

$$x=3 \quad \quad \quad 2x^2 = 8 \quad | :2$$

$$x^2 = 4$$

$$x=2 \quad \text{tai} \quad x=-2$$

b)  $5x^5 - 20x^3 = 0$

$$5x^3(x^2 - 4) = 0$$

$$5x^3 = 0 \quad | :5 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \quad \quad x^2 = 4$$

$$x=0 \quad \quad \quad x=2 \quad \text{tai} \quad x=-2$$



c)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  | sijoitetaan  $x^2 = t$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x^2 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

### Huomautus

Yhtälön voi ratkaista myös tulon nollasäännön avulla jakamalla vasemman puolen tekijöihin ryhmittelemällä.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

- Vastaus:
- a)  $x = -2, x = 2$  tai  $x = 3$
  - b)  $x = -2, x = 0$  tai  $x = 2$
  - c)  $x = -2, x = -1, x = 1$  tai  $x = 2$

## K54

Sijoitetaan  $x = 1$  yhtälöön ja ratkaistaan vakio  $a$ .

$$x^3 + 3(2a - 1)x^2 - 4x + 1 - a = 0$$

$$1^3 + 3(2a - 1) \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 - a = 0$$

$$1 + 6a - 3 - 3 - a = 0$$

$$5a - 5 = 0$$

$$5a = 5 \quad | :5$$

$$a = 1$$

Muodostetaan arvoa  $a = 1$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se (laskimella).

$$x^3 + 3(2a - 1)x^2 - 4x + 1 - a = 0$$

$$x^3 + 3 \cdot 1 \cdot x^2 - 4x + 1 - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$$

$$x = -4, \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Muut juuret ovat siis  $x = -4$  ja  $x = 0$ .

Vastaus:  $a = 1$ , muut juuret  $x = -4$  ja  $x = 0$

## K55

- a) Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenien erotus on vakio.  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$(x+3) - (3x^2) = (x^3) - (x+3)$$

$$x+3-3x^2 = x^3 - x - 3$$

$$-x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$x = -3, \quad x = -\sqrt{2} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{2}$$

### **Huomautus:**

Yhtälön voi ratkaista myös tulon nollasäännön avulla jakamalla vasemman puolen tekijöihin käyttämällä ryhmittelyä:

$$-x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$-x^2(x+3) + 2(x+3) = 0$$

$$(x+3)(-x^2+2) = 0$$

b) Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenien suhde on vakio.  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$\frac{x^3}{64x} = \frac{-x^2}{x^3}$$

$$x^3 \cdot x^3 = -x^2 \cdot 64x$$

$$x^6 + 64x^3 = 0$$

$$x = -4 \text{ tai } x = 0$$

**Huomautus:**

Yhtälön voi ratkaista myös tulon nollasäännöllä erottamalla yhteisen tekijän.

$$x^6 + 64x^3 = 0$$

$$x^3(x^3 + 64) = 0$$

Vastaus: a)  $x = -3$ ,  $x = -\sqrt{2}$  tai  $x = \sqrt{2}$   
b)  $x = -4$  tai  $x = 0$

# K56

a)  $(x^2 - 1)(-x - 1) \geq 0$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

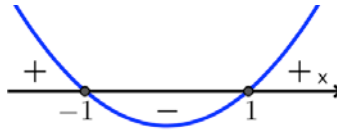
Tekijä  $x^2 - 1$  :

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 1$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



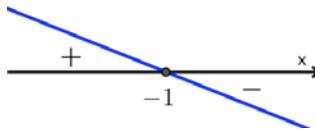
Tekijä  $-x - 1$  :

$$-x - 1 = 0$$

$$-1 = x$$

$$x = -1$$

Kuvaaja on laskeva suora



Laaditaan polynomifunktion  $(x^2 - 1)(-x - 1)$  merkkikaavio.

$x^2 - 1$	+	-	+
$-x - 1$	+	-	-
$(x^2 - 1)(-x - 1)$	+	+	-
	-1	1	

Epäyhtälö  $(x^2 - 1)(-x - 1) \geq 0$  toteutuu, kun  $x \leq 1$ .

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 - 4x \geq 0$$

$$x(x^2 - 4) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä  $x$ :

Nollakohta on  $x = 0$ . Tekijän arvo on negatiivinen, kun  $x < 0$  ja positiivinen, kun  $x > 0$ .

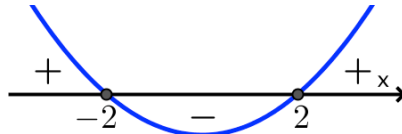
Tekijä  $x^2 - 4$ :

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 2$$



Laaditaan polynomifunktion  $x^3 - 4x$  merkkikaavio.

$x$	-	-	+	+
$x^2 - 4$	+	-	-	+
$x(x^2 - 4)$	-	+	-	+
	-2	0	2	

Epäyhtälö  $x(x^2 - 4) \geq 0$  toteutuu, kun  $-2 \leq x \leq 0$  tai  $x \geq 2$ .



## K57

Funktion  $f(x) = 4x^4$  kuvaaja on funktion  $g(x) = 9x^2$  kuvaajan alapuolella niillä muuttujan  $x$  arvoilla, joilla epäyhtälö  $f(x) < g(x)$  toteutuu.

Sievennetään epäyhtälöä.

$$f(x) < g(x)$$

$$4x^4 < 9x^2$$

$$4x^4 - 9x^2 < 0$$

$$x^2(4x^2 - 9) < 0$$

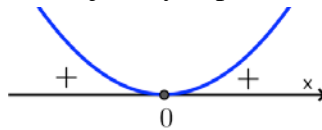
Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä  $x^2$  :

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Tekijä  $4x^2 - 9$  :

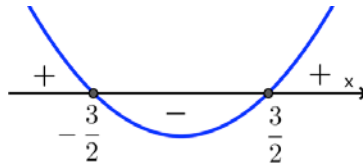
$$4x^2 - 9 = 0$$

$$4x^2 = 9 \quad | :4$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{3}{2}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.





Laaditaan polynomifunktion  $4x^4 - 9x^2$  merkkikaavio.

$x^2$	+	+	+	+
$4x^2 - 9$	+	-	-	+
$x^2(4x^2 - 9)$	+	-	-	+
	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	

Epäyhtälö  $x^2(4x^2 - 9) < 0$  toteutuu, kun  $-\frac{3}{2} < x < 0$  tai  $0 < x < \frac{3}{2}$ .

Vastaus:  $-\frac{3}{2} < x < 0$  tai  $0 < x < \frac{3}{2}$

**K58**

Koska neliöjuuri on määritelty vain epänegatiivisille luvuille, niin funktio  $f(x) = \sqrt{-x^3 + 9x} + \sqrt{x^4 - x^2}$  on määritelty niillä muuttujan  $x$  arvoilla, jotka toteuttavat molemmat epäyhtälöistä

$$-x^3 + 9x \geq 0 \quad \text{ja} \quad x^4 - x^2 \geq 0.$$

Ratkaistaan epäyhtälöt.

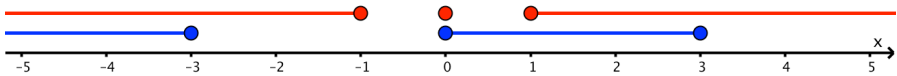
$$-x^3 + 9x \geq 0$$

$$x^4 - x^2 \geq 0$$

$$x \leq -3 \quad \text{tai} \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$x \leq -1 \quad \text{tai} \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x \geq 1$$

Ne muuttujan  $x$  arvot, jotka toteuttavat molemmat epäyhtälöt, on helpompi päätellä, kun merkitään epäyhtälöiden ratkaisujoukot näkyviin lukusuoralla.



Molemmat epäyhtälöistä toteutuvat, kun

$$x \leq -3 \quad \text{tai} \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Vastaus:  $x \leq -3$  tai  $x = 0$  tai  $1 \leq x \leq 3$

## K59

Luvun  $x$  kuution  $x^3$  tulee olla pienempi kuin sen neliö  $x^2$  kolminkertaisena.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se (laskimella).

$$x^3 < 3x^2$$

$$x^3 - 3x^2 < 0$$

$$x < 0 \text{ tai } 0 < x < 3$$

Huomaa, että laskin saattaa näyttää ratkaisun myös muodossa  $x < 3$  ja  $x \neq 0$ .

Ehdon toteuttavat positiivisen kokonaisluvut ovat 1 ja 2.

Vastaus: 1 ja 2

## K60

Sievennetään yhtälöä.

$$a^2x^2 - a^3x + \frac{13}{4}a^2 = 9$$

$$a^2x^2 - a^3x + \frac{13}{4}a^2 - 9 = 0$$

Kyseessä on toisen asteen yhtälö vain, kun  $a \neq 0$ . Pitää siis tutkia erikseen tapaukset  $a = 0$  ja  $a \neq 0$ .

1) Oletetaan ensin, että  $a = 0$ .

Muodostetaan arvoa  $a = 0$  vastaava yhtälö ja ratkaistaan se.

$$a^2x^2 - a^3x + \frac{13}{4}a^2 - 9 = 0$$

$$-9 = 0$$

epätosi

Kun  $a = 0$ , yhtälöllä ei ole yhtään juurta.

2) Oletetaan seuraavaksi, että  $a \neq 0$ .

$$a^2x^2 - a^3x + \frac{13}{4}a^2 - 9 = 0 \quad a = a^2, \quad b = -a^3, \quad c = \frac{13}{4}a^2 - 9$$

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = (-a^3)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{13}{4}a^2 - 9\right) = a^6 - 13a^4 + 36a^2$$

Yhtälöllä ei ole yhtään (reaalista) juurta, kun diskriminantti on negatiivinen. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan vakio  $a$ .

$$a^6 - 13a^4 + 36a^2 < 0 \\ -3 < a < -2 \quad \text{tai} \quad 2 < a < 3$$

Kohdista 1 ja 2 seuraa, että yhtälöllä ei ole yhtään juurta, kun  $-3 < a < -2$  tai  $a = 0$  tai  $2 < a < 3$ .

Vastaus:  $-3 < a < -2$  tai  $a = 0$  tai  $2 < a < 3$

## K61

a) Ratkaistaan nollakohdat.

$$2x^2 + 12x + 10 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad a = 1, b = 6, c = 5$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-6 - 4}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Jaetaan tekijöihin.

$$2x^2 + 12x + 10 = 2(x - (-5))(x - (-1)) = 2(x + 5)(x + 1)$$

b) Ratkaistaan nollakohtat.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad a = 1, b = -6, c = 5$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Jaetaan tekijöihin.

$$x^2 + 12x + 10 = (x-1)(x-5)$$

Vastaus: a)  $2x^2 + 12x + 10 = 2(x+5)(x+1)$

b)  $x^2 + 12x + 10 = (x-1)(x-5)$

## K62

- a) Toisen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kaksi nollakohtaa.

Nollakohdat ovat  $x_1 = -1$  ja  $x_2 = \frac{1}{2}$ , joten tekijät ovat

$$x - x_1 = (x - (-1)) = (x + 1),$$

$$x - x_2 = (x - \frac{1}{2}).$$

Funktion lauseke on siis muotoa  $P(x) = a(x + 1)(x - \frac{1}{2})$ , missä  $a \neq 0$ .

Ratkaistaan kertoimen  $a$  arvo.

$$P(0) = -1$$

$$a(0 + 1)(0 - \frac{1}{2}) = -1$$

$$-\frac{1}{2}a = -1 \quad | \cdot (-2)$$

$$a = 2$$

Siis  $P(x) = 2(x + 1)(x - \frac{1}{2}) = 2x^2 + x - 1$ .



b) Toisen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kaksi nollakohtaa.

Nollakohdat ovat  $x_1 = -\frac{1}{3}$  ja  $x_2 = 2$ , joten tekijät ovat

$$x - x_1 = \left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(x + \frac{1}{3}\right),$$

$$x - x_2 = (x - 2).$$

Funktion lauseke on siis muotoa  $P(x) = a\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)$ , missä  $a \neq 0$ .

Ratkaistaan kertoimen  $a$  arvo.

$$P(-1) = 6$$

$$a\left(-1 + \frac{1}{3}\right)(-1 - 2) = 6$$

$$2a = 6 \quad | :2$$

$$a = 3$$

Siis  $P(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 3x^2 - 5x - 2$ .

Vastaus: a)  $2\left(x + 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x^2 + x - 1$

b)  $3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 3x^2 - 5x - 2$

### K63

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin.

$$5x - 35 = 5(x - 7)$$

Osoittajalla on tekijä  $x - 7$ , jos ja vain jos  $7$  on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio  $c$ .

$$2 \cdot 7^2 - 12 \cdot 7 + c = 0$$

$$14 + c = 0$$

$$c = -14$$

Osoittajaksi saadaan  $2x^2 - 12x - 14$ .

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$2x^2 - 12x - 14 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 7$$

$$x^2 + 3x - 18 = (x + 1)(x - 7)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{2x^2 - 12x - 14}{5x - 35} = \frac{2(x+1) \overset{1}{\cancel{(x-7)}}}{5 \underset{1}{\cancel{(x-7)}}} = \frac{2(x+1)}{5} = \frac{2x+2x}{5}$$

Nimittäjän tekijä  $x - 7$  saa arvon nolla, kun  $x = 7$ . Koska nolllalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun  $x \neq 7$ .

Vastaus:  $c = -14, \frac{2}{5}(x+1) = \frac{2x+2x}{5}, \text{ kun } x \neq 7$

## K64

Kolmannen asteen polynomilla  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 105$  voi olla korkeintaan kolme nollakohtaa ja täten kolme tekijää. Määritetään polynomien kolmas tekijä ratkaisemalla yhtälö, jolla on sama nollakohta kuin polynomilla.

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$x = 7$$

Koska polynomilla on nollakohtana 7, niin kolmas tekijä on  $x - 7$ .

Polynomien tekijät ovat siis  $x + 3$ ,  $4x - 5$  ja  $x - 7$ . Tällöin polynomien lauseke on muotoa

$$P(x) = a(x + 3)(4x - 5)(x - 7) = 4ax^3 - 21ax^2 - 64ax + 105a,$$

missä  $a \neq 0$ .

Vakiotermin  $105a$  tulee 105, joten  $a = 1$ .

Polynomien lauseke on siis

$$P(x) = 4x^3 - 21x^2 - 64x + 105.$$

Selvitetään millä muuttujan  $x$  arvoilla polynomi  $P(x)$  saa vain positiivisia arvoja. Muodostetaan epäyhtälö.

$$4x^3 + 21x^2 - 64x + 105 > 0$$

$$-3 < x < \frac{5}{4} \quad \text{tai} \quad x > 7$$

Vastaus: Polynomi  $P(x) = 4x^3 - 21x^2 - 64x + 105$  saa vain positiivisia arvoja, kun  $-3 < x < \frac{5}{4}$  tai  $x > 7$ .

## A1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 4(x+5)^2 + (2x+5)(2x-5) \\ & = 4 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) + (2x)^2 - 5^2 \\ & = 4x^2 + 40x + 100 + 4x^2 - 25 \\ & = 8x^2 + 40x + 75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2x(x-3)^2 - (x+1)(2x^2-18x) \\ & = 2x \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + 3^2) - (x \cdot 2x^2 - x \cdot 18x + 2x^2 - 18x) \\ & = 2x \cdot (x^2 - 6x + 9) - (2x^3 - 16x^2 - 18x) \\ & = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2x^3 + 16x^2 + 18x \\ & = 4x^2 + 36x \end{aligned}$$

Vastaus    a)  $8x^2 + 40x + 75$     b)  $4x^2 + 36x$

## A2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4x^2 - 24x + 36 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-6) + 6^2 \\ &= (2x - 6)^2 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad 2x^2 - 3x - 9$$

$$= 2 \cdot (x - 3) \left( x - \left( -\frac{3}{2} \right) \right)$$

$$= 2 \cdot (x - 3) \left( x + \frac{2}{3} \right)$$

$$= (x - 3)(2x + 3)$$

Nollakohdat:

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x &= x(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) \\ &= x(x^2(x - 2) - 4(x - 2)) \\ &= x(x - 2)(x^2 - 4) \\ &= x(x - 2)(x^2 - 2^2) \\ &= x(x - 2)(x + 2)(x - 2) \\ &= x(x + 2)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Vastaus    a)  $(2x - 6)^2$     b)  $4x^2 + 36x$     c)  $x(x + 2)(x - 2)^2$

### A3

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\sqrt{8} - \sqrt{50} &= 3\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot \sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3}) &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - (\sqrt{3})^2 \\ &= \sqrt{3 \cdot 6} - 3 \\ &= \sqrt{18} - 3 \\ &= \sqrt{9 \cdot 2} - 3 \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3 \\ &= 3\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{c) } \frac{\sqrt{a^4} - \sqrt{\frac{4a^{\cancel{4}}}{\cancel{a}}}}{\sqrt{a^4} - \sqrt{16}} &= \frac{\sqrt{(a^2)^2} - \sqrt{4a^2}}{\sqrt{(a^2)^2} - 4} \\
&= \frac{|a^2| - \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2}}{|a^2| - 4} \quad |a^2 > 0 \\
&= \frac{a^2 - 2 \cdot |a|}{a^2 - 4} \quad |a > 0 \\
&= \frac{a^2 - 2 \cdot a}{a^2 - 2^2} \\
&= \frac{a \cdot \cancel{(a-2)}}{(a+2)(\cancel{a-2})} \\
&= \frac{a}{a+2}
\end{aligned}$$

Vastaus a)  $\sqrt{2}$  b)  $3\sqrt{2} - 3$  c)  $\frac{a}{a+2}$

## A4

a)  $2x^2 + 5x = 1$

$$2x^2 + 5x - 1 = 0$$

Diskriminantti

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Siis yhtälöllä on kaksi juurta.

b)  $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}x$

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = 0$$

Diskriminantti

$$D = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$$

Siis yhtälöllä on yksi juuri.

Vastaus a) kaksi juurta b) yksi juuri

## A5

Väitetään, että  $\sqrt{28+16\sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{3}$ .

Tutkitaan väitteen paikkansapitävyyttä neliöjuuren määritelmän avulla.

$$1) 4 + 2\sqrt{3} \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2) (4 + 2\sqrt{3})^2 &= 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 \\ &= 16 + 16\sqrt{3} + 4 \cdot 3 \\ &= 16 + 16\sqrt{3} + 12 \\ &= 28 + 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kohtien 1 ja 2 perusteella väite pitää paikkansa.

Vastaus on

## A6

a)  $3x^2 - 5x = 2x^2 - 3x + 15$

$$3x^2 - 2x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$x = -3 \text{ tai } x = 5$$

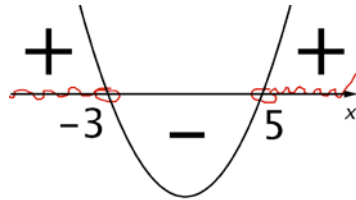
b)  $3x^2 - 5x > 2x^2 - 3x + 15$

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$

Nollakohdat:

Kuvaaja:

a-kohdan perusteella  
nollakohdat ovat  
 $x = -3$  ja  $x = 5$ .



Epäyhtälö toteutuu, kun  $x < -3$  tai  $x > 5$ .

Vastaus a)  $x = -3$  tai  $x = 5$  b)  $x < -3$  tai  $x > 5$

## A7

a)  $x^4 - 4(x^2 - x) = x^3$

$$x^4 - 4x^2 + 4x - x^3 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 - x^3 + 4x = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) - x(x^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 - x)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 - x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x(x-1) = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 = 4$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{4} \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{4}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

b) Epäyhtälö  $x^4 - 4(x^2 - x) \geq x^3$  on yhtäpitävä epäyhtälön

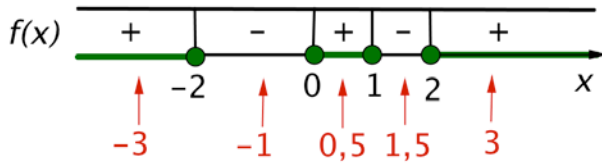
$x^4 - 4(x^2 - x) - x^3 \geq 0$  kanssa. Polynomifunktio

$f(x) = x^4 - 4(x^2 - x) - x^3$  voi vaihtaa merkkiään vain

nollakohdissaan, jotka ovat a-kohdan perusteella  $-2, 0, 1$  ja  $2$ .

Testataan funktion  $f$  merkki laskemalla testipiste kultakin väliltä.

$x$	$f(x) = x^4 - 4(x^2 - x) - x^3$	$f$ :n merkki	$f(x) \geq 0$
$-3$	$f(-3) = 60 \geq 0$	$+$	tosi
$-1$	$f(-1) = -6 < 0$	$-$	epätosi
$0,5$	$f(0,5) = 0,9375 \geq 0$	$+$	tosi
$1,5$	$f(1,5) = -1,3125 < 0$	$-$	epätosi
$3$	$f(3) = 30 \geq 0$	$+$	tosi



Testipisteiden perusteella epäyhtälö toteutuu, kun

$$x \leq -2 \text{ tai } 0 \leq x \leq 1 \text{ tai } x \geq 2$$

**Toisin:**

Epäyhtälön voi ratkaista myös kuvaajan avulla. Epäyhtälö

$$x^4 - 4(x^2 - x) \geq x^3$$

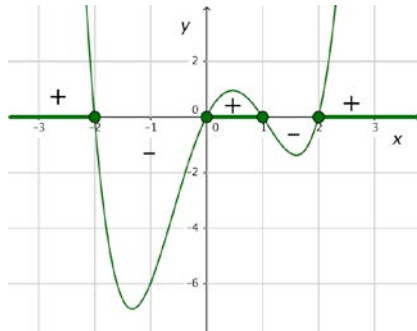
on yhtäpitävä epäyhtälön

$$x^4 - 4(x^2 - x) - x^3 \geq 0$$

kanssa.

Piirretään geometriaohjelmalla funktion

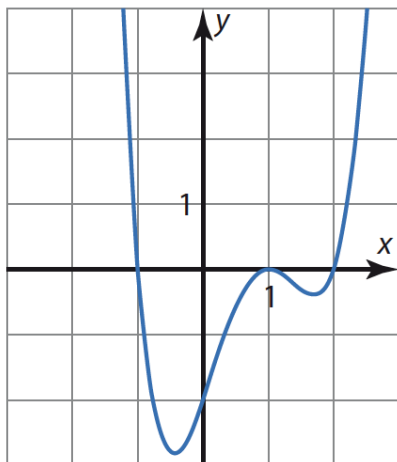
$f(x) = x^4 - 4(x^2 - x) - x^3$  kuvaaja ja selvitetään sen perusteella, millä  $x$ :n arvoilla funktion arvo on  $\geq 0$ . Funktion  $f$  nollakohdat ovat a-kohdan perusteella  $-2, 0, 1$  ja  $2$ .



Epäyhtälö toteutuu, kun  $x \leq -2$  tai  $0 \leq x \leq 1$  tai  $x \geq 2$ .

- Vastaus
- a)  $x = -2$  tai  $x = 0$  tai  $x = 1$  tai  $x = 2$
  - b)  $x \leq -2$  tai  $0 \leq x \leq 1$  tai  $x \geq 2$

# A8



$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

- a)  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$ , kun  $x = -1$ ,  $x = 1$  tai  $x = 2$ .
- b)  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 < 0$ , kun  $-1 < x < 1$  tai  $1 < x < 2$ .
- c)  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \geq 0$ , kun  $x \leq -1$ ,  $x = 1$  tai  $x \geq 2$ .

## A9

a)

$$(1+x)^3 - (1-x)^3$$

$$= (1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 + x^3) - (1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (-x) + 3 \cdot 1 \cdot (-x)^2 + (-x)^3)$$

$$= (1 + 3x + 3x^2 + x^3) - (1 - 3x + 3x^2 - x^3)$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 1 + 3x - 3x^2 + x^3$$

$$= 6x + 2x^3$$

$$= 2x^3 + 6x$$

b)  $\frac{1}{a-1} \left( {}^a a - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a-1} \left( \frac{a^2}{a} - \frac{1}{a} \right)$

$$= \frac{1}{a-1} \left( \frac{a^2 - 1}{a} \right)$$

$$= \frac{1 \cdot (a^2 - 1)}{(a-1) \cdot a}$$

$$= \frac{(a+1)(\cancel{a-1})}{(\cancel{a-1}) \cdot a}$$

$$= \frac{a+1}{a}$$



$$\begin{aligned}
 \text{c) } & (a+b)^2 - (a-b)^2 \\
 &= (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) - (a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2) \\
 &= (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2
 \end{aligned}$$

$$= 4ab$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 100^{300} \\ b = 100^{-300} \end{array} \right.$$

$$= 4 \cdot 100^{300} \cdot 100^{-300}$$

$$= 4 \cdot 100^{300-300}$$

$$= 4 \cdot 100^0$$

$$= 4 \cdot 1$$

$$= 4$$

Vastaus a)  $2x^3 + 6x$

b)  $\frac{a+1}{a}$

c)  $4ab = 4$  kun  $a = 100^{300}$  ja  $b = 100^{-300}$ .

# B1

a)  $x + 2(x - 7)^2 - (x + 4)(x - 4)$

$$= x + 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-7) + (-7)^2) - (x^2 - 4^2)$$

$$x + 2(x^2 - 14x + 49) - x^2 + 16$$

$$= x + 2x^2 - 28x + 98 - x^2 + 16$$

$$= x^2 - 27x + 114$$

b)  $x^5 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 10x$

$$= x(x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 3x - 10)$$

$$= x(x^4 - 3x^3 - 9x^2 - x^2 + x^2 - 3x - 10) \quad | \text{Ryhmittely}$$

$$= x(x^4 - 3x^3 - 10x^2 + x^2 - 3x - 10)$$

$$= x(x^2(x^2 - 3x - 10) + (x^2 - 3x - 10))$$

$$= x(x^2 + 1)(x^2 - 3x - 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - 10 = 0 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \\ x = 5 \quad \text{tai} \quad x = -2 \end{array} \right\}$$

$$= x(x^2 + 1)(x - (-2))(x - 5)$$

$$= x(x^2 + 1)(x + 2)(x - 5)$$

c)  $2x^2 - 6 \leq x^2 + x$

$$2x^2 - x^2 - x - 6 \leq 0$$

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

1) Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

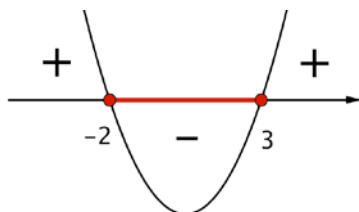
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = 3 \text{ tai } x = -2$$

2) Hahmotellaan kuvaaja  $y = x^2 - x - 6$ .

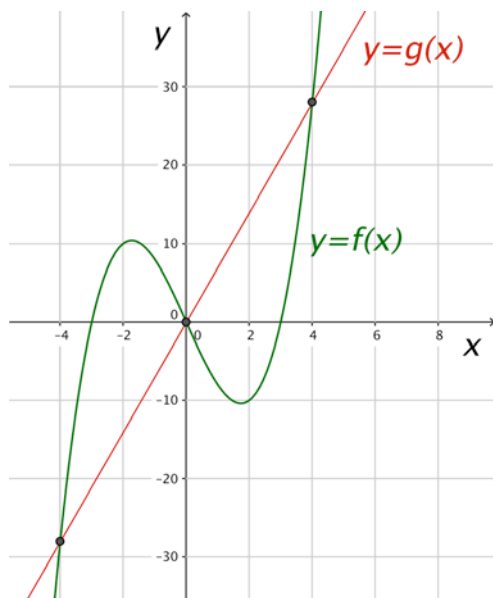


Epäyhtälön ratkaisu on  $-2 \leq x \leq 3$ .

- Vastaus
- a)  $x^2 - 27x + 114$
  - b)  $x(x^2 + 1)(x + 2)(x - 5)$
  - c)  $-2 \leq x \leq 3$

## B2

Piirretään kuvaajat geometriaohjelmalla.



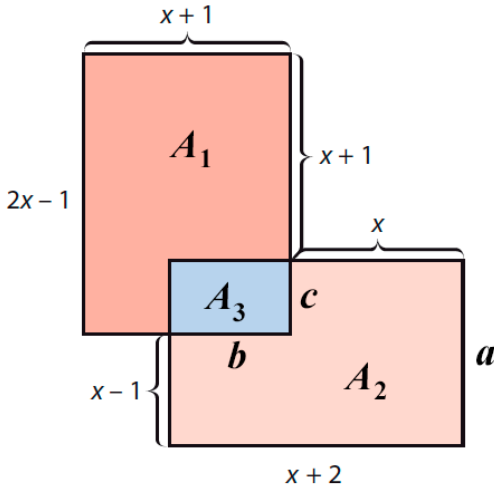
$$f(x) = x^3 - 9x, \quad g(x) = 7x$$

a)  $f(x) > 0$ , kun  $-3 < x < 0$  tai  $x > 3$ .

b)  $g(x) < 0$ , kun  $x < 0$ .

c)  $g(x) \geq f(x)$ , kun tai  $0 \leq x \leq 4$ .

### B3



Koko kuvion pinta-ala saadaan laskemalla punaisten suorakulmioiden pinta-alat yhteen ja vähentämällä saadusta summasta kahteen kertaan mukaan tulleen sinisellä värjätyn yhteisen osan pinta-ala.

Alemman punaisen suorakulmion korkeus on

$$\begin{aligned} a &= (2x-1) + (x-1) - (x+1) = 2x-1 + x-1 - x-1 \\ &= 2x-3 \end{aligned}$$

Sinisen suorakulmion kanta on

$$b = (x+2) - x = 2$$

Sinisen suorakulmion korkeus on

$$\begin{aligned} c &= (2x-1) - (x+1) = 2x-1 - x-1 \\ &= x-2 \end{aligned}$$

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

$$= (x+1)(2x-1) + (x+2)(2x-3) - 2 \cdot (x-2)$$

$$= 2x^2 - x + 2x - 1 + 2x^2 - 3x + 4x - 6 - 2x + 4$$

$$= 4x^2 - 3$$

Toisaalta pinta-ala on 33. Muodostetaan yhtälö.

$$A = 33$$

$$4x^2 - 3 = 33$$

$$4x^2 = 33 + 3 \quad | :4$$

$$x^2 = \frac{36}{4}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} \quad | x > 0$$

$$x = 3$$

Vastaus  $x = 3$

## B4

Mopoauton hinta tulee vuodessa  $k$ -kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö.

$$k^5 \cdot 12\,500 \text{ €} = 5\,550 \text{ €} \quad | : (12\,500 \text{ €})$$

$$k^5 = \frac{5\,550 \text{ €}}{12\,500 \text{ €}}$$

$$= \frac{5\,550}{12\,500}$$

$$k = \sqrt[5]{\frac{5\,550}{12\,500}}$$

$$= 0,8501\dots$$

$$= 85,01\dots \%$$

Hinta laski keskimäärin vuodessa

$$100 \% - 85,01\dots \% = 14,98\dots \% \approx 15 \%$$

Vastaus 15 %

## B5

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= a(x - (-1))(x - 0)(x - 2)(x - 3) \\ &= ax(x + 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1 \cdot (1 + 1)(1 - 2)(1 - 3) \\ &= a \cdot 2 \cdot (-1)(-2) \\ &= 4a \end{aligned}$$

Toisaalta  $f(1) = -24$ , joten saadaan yhtälö

$$4a = -24 \quad | :4$$

$$a = \frac{-24}{4} = -6$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= a(x - (-1))^2(x - 2)^2 \\ &= a(x + 1)^2(x - 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= a(1 + 1)^2(1 - 2)^2 \\ &= a \cdot 2^2 \cdot (-1)^2 \\ &= a \cdot 4 \cdot 1 \\ &= 4a \end{aligned}$$



Toisaalta  $f(1) = -24$ , joten saadaan yhtälö

$$4a = -24 \quad | :4$$

$$a = \frac{-24}{4} = -6$$

- Vastaus
- a)  $f(x) = -6x(x+1)(x-2)(x-3)$
  - b)  $f(x) = -6(x+1)^2(x-2)^2$

## B6

Olkoon neliönmuotoisen tontin sivun pituus  $6a$ , jolloin talon pituus on puolet tontin sivun pituudesta eli  $3a$  ja leveys kolmannes tontin sivusta eli  $2a$ .

Tontin pinta-ala on

$$A_{\text{tontti}} = (6a)^2 = 36a^2$$

Piha-alueen pinta-alan avulla saadaan yhtälö

$$A_{\text{piha}} = 400$$

$$(6a)^2 - 3a \cdot 2a = 400$$

$$36a^2 - 6a^2 = 400$$

$$30a^2 = 400 \quad | : 30$$

$$a^2 = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}$$

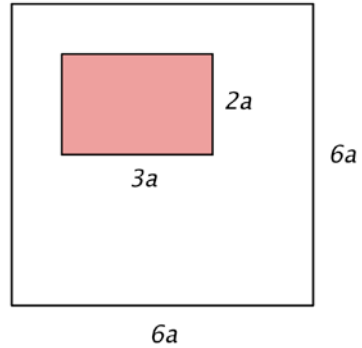
Lasketaan tontin pinta-ala.

$$A_{\text{tontti}} = 36a^2 \quad \left| a^2 = \frac{40}{3} \right.$$

$$= \cancel{36}^{12} \cdot \frac{40}{\cancel{3}}$$

$$= 40 \cdot 12 = 480 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus Tontin pinta-ala on  $480 \text{ m}^2$ .



## B7

$$3x^2 + tx - 3x = 2x^2 - 2x - 1$$

$$3x^2 - 2x^2 + tx + 2x - 3x + 1 = 0$$

$$x^2 + tx - x + 1 = 0$$

$$x^2 + (t-1)x + 1 = 0$$

Kyseessä on toisen asteen yhtälö. Ratkaisuja on täsmälleen yksi, kun diskriminantti  $D = 0$ .

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(t-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 4$$

$$t-1 = \pm\sqrt{4}$$

$$t-1 = \pm 2$$

$$t = -2 + 1 \quad \text{tai} \quad t = 2 + 1$$

$$t = -1 \quad \text{tai} \quad t = 3$$

Tapaus  $t = -1$ :

$$x^2 + (t-1)x + 1 = 0 \quad | \quad t = -1$$

$$x^2 + (-1-1)x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot (-1) + (-1)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

Tapaus  $t = 3$ :

$$x^2 + (t-1)x + 1 = 0 \quad | \quad t = 3$$

$$x^2 + (3-1)x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

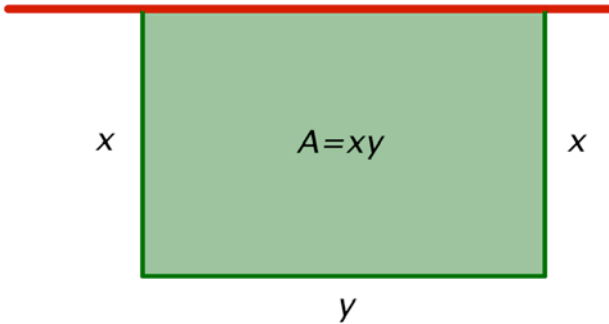
$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

Vastaus    Kun  $t = -1$ , niin  $x = 1$ .

            Kun  $t = 3$ , niin  $x = -1$ .

## B8



Aitauksen pinta-ala on  $A = xy$ .

Aitaa on käytettävissä yhteensä  $2x + y = 36$  (m).

Ratkaistaan  $y$  ja sijoitetaan saatu lauseke pinta-alan lausekkeeseen.

$$2x + y = 36$$

$$y = 36 - 2x$$

$$A(x) = xy$$

$$= x \cdot (36 - 2x)$$

$$= 36x - 2x^2$$

$$= -2x^2 + 36x$$

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0$$

$$36 - 2x > 0$$

$$-2x > -36$$

$$x < \frac{-36}{-2}$$

$$x < 18$$

$$0 < x < 18$$

Pinta-alafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka suurin arvo löytyy huipusta. Huipun  $x$ -koordinaatti on symmetrian perusteella nollakohtien keskiarvo.

$$A(x) = 0$$

$$-2x^2 + 36x = 0$$

$$x(-2x + 36) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } -2x + 36 = 0$$

$$-2x = -36$$

$$x = 18$$

Huipun  $x$ -koordinaatti on  $x_0 = \frac{0+18}{2} = 9$ . Tämä arvo kelpaa, sillä se kuuluu määrittelyvälille  $0 < x < 18$ . Pinta-alan suurin mahdollinen arvo on

$$A(9) = -2 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 = 162 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus Aitauksen suurin mahdollinen pinta-ala on  $162 \text{ m}^2$ .

### Paraabelin huippu toisin:

Paraabelin  $y = ax^2 + bx + c$  huipun  $x$ -koordinaatin saa laskettua

myös suoraan kaavalla  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad \left| \begin{array}{l} y = -2x^2 + 36x \\ a = -2, b = 36 \end{array} \right.$$

$$= \frac{-36}{2 \cdot (-2)}$$

$$= 9$$

## B9

Ratkaistaan epäyhtälö  $t \leq 0,5$  h eli  $t \leq 30$  min.

$$t \leq 30$$

$$0,01m^2 + 0,03m + 18 \leq 30 \quad | \cdot 100$$

$$m^2 + 3m + 1800 \leq 3000$$

$$m^2 + 3m + 1800 - 3000 \leq 0$$

$$m^2 + 3m - 1200 \leq 0$$

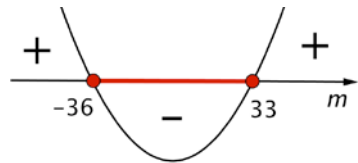
1) Nollakohdat

$$x - 2$$

2) Kuvaaja

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$y = m^2 + 3m - 1200$$



$$-36 \leq m \leq 33 \quad | \quad m \geq 0$$

$$0 \leq m \leq 33$$

Vastaus Liikennevirran on oltava enintään 33 autoa minuutissa.

## B10

$$\frac{ax^3 - 12x^2 + bx}{x^2 - 3ax + 8}, \quad x^2 - 3ax + 8 \neq 0.$$

Nimittäjä on jaollinen binomilla  $x - 2$ , joten nimittäjällä on nollakohta  $x = 2$ . Sijoitetaan nimittäjän lausekkeeseen  $x^2 - 3ax + 8$  arvo  $x = 2$  ja muodostetaan yhtälö.

$$2^2 - 3a \cdot 2 + 8 = 0$$

$$-6a + 12 = 0$$

$$-6a = -12 \quad | :(-6)$$

$$a = \frac{-12}{-6}$$

$$a = 2$$

Osoittaja on jaollinen binomilla  $x - 4$ , joten osoittajalla on nollakohta  $x = 4$ . Sijoitetaan osoittajan lausekkeeseen  $ax^3 - 12x^2 + bx$  arvot  $x = 4$  sekä jo ratkaistu  $a = 2$  ja muodostetaan yhtälö.

$$2 \cdot 4^3 - 12 \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 0$$

$$128 - 192 + 4b = 0$$

$$4b = 192 - 128 \quad | :4$$

$$b = \frac{64}{4}$$

$$b = 16$$



Sievennetään murtolauseke.

$$\frac{ax^3 - 12x^2 + bx}{x^2 - 3ax + 8}$$

$$| a = 2, b = 16$$

$$= \frac{2x^3 - 12x^2 + 16x}{x^2 - 3 \cdot 2x + 8}$$

$$= \frac{(x^2 - 6x + 8) \cdot 2x}{x^2 - 6x + 8}$$

$$x^2 - 6x + 8 \neq 0$$

$$x \neq \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x \neq \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x \neq \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x \neq 4 \text{ ja } x \neq 2$$

$$= 2x, x \neq 4 \text{ ja } x \neq 2$$

Vastaus  $a = 2$  ja  $b = 16$

Murtolausekkeen supistettu muoto on  $2x$  ja se on määritelty, kun  $x \neq 4$  ja  $x \neq 2$ .