

YHTEINEN TEKIJÄ

TEHTÄVIEN RATKAISUT

Luku 2.1

67.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$

c) $(-9) \cdot (-9) \cdot (-9) = (-9)^3$

d) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$

68.

a) $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

c) $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

d) $5^1 = 5$

69.

a) Negatiivinen kantaluku on merkittävä sulkeisiin.

Luvun -3 kolmas potenssi merkitään $(-3)^3$.

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$$

b) Luvun -3 neljäs potenssi merkitään $(-3)^4$.

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot 9 = 81$$

c) Luvun 3 neljäs potenssi on $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Neljännän potenssin vastaluku on $-3^4 = -81$.

70.

a) Luvun 6 neliö merkitään 6^2 .

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$

b) Luvun -4 neliö merkitään $(-4)^2$.

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

c) Luvun -1 kuutio merkitään $(-1)^3$.

$$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

d) Luvun 5 kuutio merkitään 5^3 .

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$$

71.

a) $5 \cdot (-2)^2 = 5 \cdot 4 = 20$

b) $5 - 4^2 = 5 - 16 = -11$

c) $(-2)^3 + 4 \cdot 5 = -8 + 20 = 12$

72.

Potenssi	Arvo
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
2^0	1
2^{-1}	$\frac{1}{2} = 0,5$
2^{-2}	$\frac{1}{4} = 0,25$
2^{-3}	$\frac{1}{8} = 0,125$
2^{-4}	$\frac{1}{16} = 0,0625$

Potenssi	Arvo
10^4	10000
10^3	1000
10^2	100
10^1	10
10^0	1
10^{-1}	$\frac{1}{10} = 0,1$
10^{-2}	$\frac{1}{100} = 0,01$
10^{-3}	$\frac{1}{1000} = 0,001$
10^{-4}	$\frac{1}{10000} = 0,0001$

Positiiviset ja negatiiviset potenssit ovat toistensa käänteislukuja.

73. a) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

b) $7^{-1} = \frac{1}{7}$

c) $15^0 = 1$

d) $(-9)^{-2} = \frac{1}{(-9)^2} = \frac{1}{81}$

e) $(-5)^{-1} = \frac{1}{(-5)^1} = -\frac{1}{5}$

f) $(-3)^0 = 1$

74. a) $7^0 + 4^{-2} + 2^{-3} = 7^0 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = 1\frac{3}{16}$

b) $6^2 \cdot 12^{-1} \cdot (-2)^{-4} = 6^2 \cdot \frac{1}{12^1} \cdot \frac{1}{(-2)^4} = 36 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\cancel{36}^3 \cdot 1 \cdot 1}{\cancel{12}_1 \cdot 16} = \frac{3}{16}$

75. a) $803000 \text{ J} \approx 8,0 \cdot 10^5 \text{ J}$

b) $59000 \text{ J} = 5,9 \cdot 10^4 \text{ J}$

c) $0,000618 \text{ g} \approx 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ g}$

d) $0,0000075 \text{ g} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ g}$

76. a) $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 101\,300 \text{ Pa}$

b) $2,0 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} = 0,0000020 \text{ Pa}$

c) $6,960 \cdot 10^8 \text{ m} = 696\,000\,000 \text{ m}$

d) $1,35 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0,00000000000135 \text{ m}$

77. a) $6\,378\,140\text{ m} \approx 6,38 \cdot 10^6\text{ m}$

b) $384\,400\text{ km} \approx 3,84 \cdot 10^5\text{ km}$

c) $0,000000546\text{ m} \approx 5,46 \cdot 10^{-7}\text{ m}$

d) $0,001002\text{ Ns/m}^2 \approx 1,00 \cdot 10^{-3}\text{ Ns/m}^2$

78. a) $11^{12} = 3,138428377 \cdot 10^{12} \approx 3,1 \cdot 10^{12}$

b) $0,62^{23} = 1,678838262 \cdot 10^{-5} \approx 1,7 \cdot 10^{-5}$

c) $\frac{8,3 \cdot 10^3}{5,26 \cdot 10^7} = 1,577946768 \cdot 10^{-4} \approx 1,6 \cdot 10^{-4}$

d) $2,998 \cdot 10^8 \cdot 4,5 \cdot 10^{-12} = 0,0013491 \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$

79. Lasketaan ensin, kuinka monta sekuntia on $2,2 \cdot 10^6$ vuodessa.

$$2,2 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ sekuntia}$$

Valon kulkema matka on valon nopeuden ja ajan tulo.

$$\begin{aligned} & 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \\ & \approx 2,1 \cdot 10^{22} \text{ m} \\ & = \frac{2,1 \cdot 10^{22}}{1000} \text{ km} \\ & = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ km} \end{aligned}$$

Vastaus. Andromedan etäisyys on noin $2,1 \cdot 10^{19}$ km.

80. Laservalon aallonpituus $\lambda = 4,05 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ja nopeus $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Lasketaan laservalon taajuus.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4,05 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 7,40 \cdot 10^{14} \text{ 1/s}$$

Vastaus. Taajuus on $7,40 \cdot 10^{14} \text{ 1/s}$.

81. a) Yhden vesilitran massa $m = 1,000 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ ja moolimassa $M = 18,016 \text{ g/mol}$.

Lasketaan ainemäärä.

$$n = \frac{m}{M} = \frac{1000 \text{ g}}{18,016 \text{ g/mol}} \approx 55,51 \text{ mol}$$

b) Yksi mooli vettä sisältää $6,022 \cdot 10^{23}$ vesimolekyyliä. Lasketaan, kuinka monta vesimolekyyliä on vesilitrassa.

$$55,51 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \approx 3,343 \cdot 10^{25}$$

Vastaus. a) 55,51 mol b) $3,343 \cdot 10^{25}$ vesimolekyyliä

82. a) $\frac{1}{5^9} = 5^{-9}$

b) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

c) $\frac{1}{5} = \frac{1}{5^1} = 5^{-1}$

d) $1 = 5^0$

83. a) $81 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4$

b) Lukua -9 ei voi ilmaista kantaluvun -3 potenssina, koska $(-3)^2 = 9$.

c) $\frac{1}{9} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{(-3)^2} = (-3)^{-2}$

d) $-\frac{1}{27} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{(-3)^3} = (-3)^{-3}$

84. a) Yhtälö $x^2 = x$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $x = 1$.

$$x^2 = x$$

$$0^2 = 0$$

$$x^2 = x$$

$$1^2 = 1$$

b) Yhtälö $x^2 = -x$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $x = -1$.

$$x^2 = -x$$

$$0^2 = -0$$

$$0 = 0$$

$$x^2 = -x$$

$$(-1)^2 = -(-1)$$

$$1 = 1$$

c) Yhtälö $x^2 = |x|$ toteutuu, kun $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 1$.

$$x^2 = |x|$$

$$(-1)^2 = |-1|$$

$$1 = 1$$

$$x^2 = |x|$$

$$0^2 = |0|$$

$$0 = 0$$

$$x^2 = |x|$$

$$1^2 = |1|$$

$$1 = 1$$

d) Yhtälö $x^2 = \frac{1}{x}$ toteutuu, kun $x = 1$.

$$x^2 = \frac{1}{x}$$

$$1^2 = \frac{1}{1^2}$$

$$1 = 1$$

85. Kanien lukumäärä kasvaa joka vuosi 1,3-kertaiseksi.

a) Yhden vuoden kuluttua kaneja on $720 \cdot 1,3$.

Kahden vuoden kuluttua kaneja on $720 \cdot 1,3 \cdot 1,3 = 720 \cdot 1,3^2 \approx 1\,200$.

b) Kahdentoista vuoden kuluttua kaneja on $720 \cdot 1,3^{12} \approx 17\,000$.

c) n vuoden kuluttua kaneja on $720 \cdot 1,3^n$.

86. Bakteeriviljelmän massa kasvaa joka tunti kolminkertaiseksi.

a) Yksi tunti sitten massa oli $\frac{36}{3} = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12$ grammaa.

b) Kaksi tuntia sitten massa oli $36 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 4$ grammaa.

c) Viisi tuntia sitten massa oli $36 \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{5\text{kpl}} = 36 \cdot \frac{1}{3^5} = 36 \cdot 3^{-5} \approx 0,15$ grammaa.

d) n tuntia sitten massa oli $36 \cdot \frac{1}{3^n} = 36 \cdot 3^{-n}$ grammaa.

87. Auringon säde on $6,960 \cdot 10^8$ m ja Aurinkoa esittävän pallon säde 1 m.

Aurinkokunnan mallin mittakaava on pallon säteen suhde Auringon säteeseen:

$$\frac{1}{6,960 \cdot 10^8}$$

Maata esittävän pallon säde saadaan kertomalla Maan säde mittakaavalla.

$$\frac{1}{6,960 \cdot 10^8} \cdot 6\,378\,000 \text{ m} = 0,00916\dots \text{ m} \approx 9 \text{ mm}$$

Maata esittävän pallon etäisyys saadaan kertomalla Maan keskietäisyys mittakaavalla.

$$\frac{1}{6,960 \cdot 10^8} \cdot 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = 0,2149\dots \text{ km} \approx 200 \text{ m}$$

Vastaus. Maan säde oli 9 mm ja etäisyys 200 m.

88. Happiatomin ytimen säde oli $3,5 \cdot 10^{-15}$ m ja sitä esittävän ympyrän säde 1,0 cm = 0,010 m.

Piirroksen mittakaava on ympyrän säteen suhde ytimen säteeseen:

$$^{100)} \frac{0,010}{3,5 \cdot 10^{-15}} = \frac{1}{3,5 \cdot 10^{-13}}$$

Happiatomia esittävän ympyrän säde saadaan kertomalla happiatomin säde mittakaavalla.

$$\frac{1}{3,5 \cdot 10^{-13}} \cdot 6,0 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 170 \text{ m}$$

Vastaus. Säteen olisi pitänyt olla 170 m.

89. Yhden uraaniytimen fission vapautuu energiaa $3,20 \cdot 10^{-13}$ J.

Tästä saadaan muutettua sähköenergiaksi 25 % eli $0,25 \cdot 3,20 \cdot 10^{-13}$ J = $0,8 \cdot 10^{-13}$ J.

Voimalaitos tuottaa sähköenergiaa $8,00 \cdot 10^6$ J sekunnissa. Lasketaan siihen tarvittava uraaniytimien lukumäärä.

$$\frac{8,00 \cdot 10^6}{0,8 \cdot 10^{-13}} = 10^{20}$$

Lasketaan yhdessä vuodessa tarvittavien uraaniatomien massa.

$$10^{20} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 3,903 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \approx 1\,200 \text{ kg}$$

Vastaus. Uraania kuluu vuodessa 1 200 kg.

Luku 2.2

90.

a) $(3a)^3 = 3^3 a^3 = 27a^3$

b) $\left(\frac{a}{2}\right)^4 = \frac{a^4}{2^4} = \frac{a^4}{16}$

c) $a^5 a^2 a = a^{5+2+1} = a^8$

d) $\frac{3a^6}{a^4} = 3a^{6-4} = 3a^2$

e) $(a^2)^5 = a^{2 \cdot 5} = a^{10}$

91.

a) $4b^2 \cdot 2b^5 = 4 \cdot 2 \cdot b^{2+5} = 8b^7$

b) $(-b)^6 = (-1)^6 b^6 = 1b^6 = b^6$

c) $(b^4)^3 = b^{4 \cdot 3} = b^{12}$

d) $\left(\frac{b}{7}\right)^2 = \frac{b^2}{7^2} = \frac{b^2}{49}$

e) $\frac{b^{12}}{b} = b^{12-1} = b^{11}$

92.

a) Tätä ei ole mahdollista enää sieventää, koska potensseilla on eri kantaluviut.

b) $a^3 a^5 = a^{3+5} = a^8$

c) $(-a^3)^5 = (-1)^5 (a^3)^5 = (-1)a^{3 \cdot 5} = -a^{15}$

d) Tätä ei ole mahdollista enää sieventää, koska potensseilla on eri kantaluviut.

e) $\frac{b^3}{b^5} = b^{3-5} = b^{-2} = \frac{1}{b^2}$

93.

$$a) \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{7^2}{10^2} = \frac{49}{100}$$

$$b) \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{-1}{2}\right)^4 = \frac{(-1)^4}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$c) \left(2\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

94.

$$a) \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2} = \frac{36}{25}$$

$$b) \left(\frac{8}{9}\right)^{-1} = \left(\frac{9}{8}\right)^1 = \frac{9^1}{8^1} = \frac{9}{8}$$

$$c) \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

95.

$$a) \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} = \frac{9}{4} + \frac{4}{9} = \frac{81}{36} + \frac{16}{36} = \frac{97}{36}$$

$$b) \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7^2 + 7^1 = 49 + 7 = 56$$

$$c) \left(1\frac{3}{8}\right)^0 + \left(1\frac{3}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{11}{8}\right)^0 + \left(\frac{11}{8}\right)^{-1} = 1 + \left(\frac{8}{11}\right)^1 = 1 + \frac{8^1}{11^1} = 1 + \frac{8}{11} = 1\frac{8}{11}$$

96.

a) $(9x)^2 x^5 = 9^2 \cdot x^2 \cdot x^5 = 81x^{2+5} = 81x^7$

b) $\frac{(2x^5)^3}{2x^5} = \frac{2^3(x^5)^3}{2x^5} = \frac{8x^{5 \cdot 3}}{2x^5} = \frac{8}{2} \cdot \frac{x^{15}}{x^5} = 4 \cdot x^{15-5} = 4x^{10}$

c) $\frac{16x^5 x^3}{3x \cdot 4x^8} = \frac{16x^{5+3}}{12x^{1+8}} = \frac{\cancel{16}^4 x^8}{\cancel{12}_3 x^9} = \frac{4}{3} x^{8-9} = \frac{4}{3} x^{-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{3x}$

97.

a) $a^2 a^{-1} = a^{2+(-1)} = a^1 = a$

b) $12a^4 (6a)^{-1} = 12a^4 \cdot \frac{1}{6a} = \frac{\cancel{12}^2 a^4}{\cancel{6}_1 a} = 2a^{4-1} = 2a^3$

c) $18a^4 (2a)^{-3} = 18a^4 \cdot \frac{1}{(2a)^3} = 18a^4 \cdot \frac{1}{8a^3} = \frac{\cancel{18}^9 a^4}{\cancel{8}_4 a^3} = \frac{9}{4} a^{4-3} = \frac{9}{4} a$

98.

a) $(5a)^2 - 5a^2 = 5^2 \cdot a^2 - 5a^2 = 25a^2 - 5a^2 = 20a^2$

b) $(-5a)^2 - 5a^2 = (-5)^2 a^2 - 5a^2 = 25a^2 - 5a^2 = 20a^2$

c) $-5a^2 - (5a)^2 = -5a^2 - 5^2 a^2 = -5a^2 - 25a^2 = -30a^2$

99.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2a & & & & \\ & a^{10} & : & \frac{1}{2a^2} & & & \\ \frac{a^3}{8} & \cdot & 8a^2 & \cdot & \frac{a^2}{16} & & \\ (a^3)^2 & : & (2a)^3 & \cdot & a^4 & : & (4a)^2 \end{array}$$

100.

a) $3 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{1+4+5} = 3^{10}$

b) $\frac{3^{12}}{3} = 3^{12-1} = 3^{11}$

c) $(3^6)^2 = 3^{6 \cdot 2} = 3^{12}$

101.

a) $\frac{1}{5 \cdot 5^3 \cdot 5^8} = \frac{1}{5^{1+3+8}} = \frac{1}{5^{12}} = 5^{-12}$

b) $\frac{5^8}{5^3 \cdot 5^6} = \frac{5^8}{5^{3+6}} = \frac{5^8}{5^9} = 5^{8-9} = 5^{-1}$

c) $\frac{5^3 \cdot 5^4}{(5^3)^4} = \frac{5^{3+4}}{5^{3 \cdot 4}} = \frac{5^7}{5^{12}} = 5^{7-12} = 5^{-5}$

102.

a) $\frac{36^3}{12^3} = \left(\frac{36}{12}\right)^3 = 3^3 = 27$

b) $\frac{102^2}{408^2} = \left(\frac{102}{408}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$

c) $\frac{8^6}{16^3} = \frac{(2^3)^6}{(2^4)^3} = \frac{2^{18}}{2^{12}} = 2^6 = 64$

103.

a) $0,2^7 \cdot 5^7 = (0,2 \cdot 5)^7 = 1^7 = 1$

b) $5^{102} \cdot 0,2^{100} = 5^{100+2} \cdot 0,2^{100} = 5^{100} \cdot 5^2 \cdot 0,2^{100} = (5 \cdot 0,2)^{100} \cdot 5^2 = 1^{100} \cdot 5^2 = 1 \cdot 25 = 25$

c)

$$\begin{aligned} & 2^{3003} \cdot 5^{3001} \cdot 0,1^{3000} \\ &= 2^{3000+3} \cdot 5^{3000+1} \cdot 0,1^{3000} \\ &= 2^{3000} \cdot 2^3 \cdot 5^{3000} \cdot 5^1 \cdot 0,1^{3000} \\ &= (2 \cdot 5 \cdot 0,1)^{3000} \cdot 2^3 \cdot 5^1 \\ &= 1^{3000} \cdot 2^3 \cdot 5^1 \\ &= 1 \cdot 8 \cdot 5 = 40 \end{aligned}$$

104.

a) $\frac{2^4 \cdot 2^{99}}{2^{100}} = \frac{2^{103}}{2^{100}} = 2^3 = 8$

b) $\frac{2^8 \cdot 8^3}{16^4} = \frac{2^8 \cdot (2^3)^3}{(2^4)^4} = \frac{2^8 \cdot 2^9}{2^{16}} = \frac{2^{17}}{2^{16}} = 2^1 = 2$

c) $\frac{3^{11} \cdot 9^5}{27^6} = \frac{3^{11} \cdot (3^2)^5}{(3^3)^6} = \frac{3^{11} \cdot 3^{10}}{3^{18}} = \frac{3^{21}}{3^{18}} = 3^3 = 27$

105.

a) $xy(x^4y)^3 = x \cdot y \cdot (x^4)^3 \cdot y^3 = x \cdot y \cdot x^{12} \cdot y^3 = x^{1+12} y^{1+3} = x^{13} y^4$

b) $\frac{(2xy)^5}{2x^5y} = \frac{2^5 x^5 y^5}{2x^5y} = 2^{5-1} x^{5-5} y^{5-1} = 2^4 x^0 y^4 = 16 \cdot 1 \cdot y^4 = 16y^4$

c) $\frac{18x^3y^4}{3x \cdot 4xy^3} = \frac{18x^3y^4}{12x^2y^3} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} x^{3-2} y^{4-3} = \frac{3}{2} x^1 y^1 = \frac{3}{2} xy$

106.

$$a) xy^2(xy^4)^5 = xy^2x^5(y^4)^5 = x^1y^2x^5y^{20} = x^6y^{22}$$

$$b) \frac{xy^6}{(xy)^6} = \frac{xy^6}{x^6y^6} = x^{1-6}y^{6-6} = x^{-5}y^0 = x^{-5} \cdot 1 = \frac{1}{x^5}$$

$$c) \frac{(-x^2y)^6}{x(y^4)^2} = \frac{(-1)^6(x^2)^6y^6}{x(y^4)^2} = \frac{1 \cdot x^{12} \cdot y^6}{x \cdot y^8} = x^{12-1}y^{6-8} = x^{11}y^{-2} = x^{11} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{x^{11}}{y^2}$$

107.

$$a) (xy)^{-1}(x^3y)^5 = \frac{1}{xy} \cdot (x^3)^5y^5 = \frac{x^{15}y^5}{xy} = x^{14}y^4$$

$$b) xy^3(2x)^{-5} = xy^3 \cdot \frac{1}{(2x)^5} = xy^3 \cdot \frac{1}{32x^5} = \frac{1}{32} \cdot x^{1-5}y^3 = \frac{1}{32} \cdot x^{-4}y^3 = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{x^4} \cdot y^3 = \frac{y^3}{32x^4}$$

$$c) (7x)^5(7xy)^{-3} = (7x)^5 \cdot \frac{1}{(7xy)^3} = 7^5x^5 \cdot \frac{1}{7^3x^3y^3} = 7^{5-3}x^{5-3} \cdot \frac{1}{y^3} = 7^2x^2 \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{49x^2}{y^3}$$

108. Ilmaistaan lausekkeet ensin kantaluvun 5 potensseina. Jokaisen rivin, sarakkeen ja lävistäjän tulo on yhtä suuri, kun eksponenttien summa on yhtä suuri. Täydennetään neliö niin, että eksponenttien summaksi tulee 15.

5^8	5^3	5^4
5^1	5^5	5^9
5^6	5^7	5^2

109.

$$a) \frac{8 \cdot 15^2}{5 \cdot 6^3} = \frac{2^3 \cdot (3 \cdot 5)^2}{5 \cdot (3 \cdot 2)^3} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{5 \cdot 3^3 \cdot 2^3} = 5^{2-1} \cdot 3^{2-3} \cdot 2^{3-3} = 5^1 \cdot 3^{-1} \cdot 2^0 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

$$b) \frac{(2 \cdot 10^{-12})^5}{4 \cdot 10^{-6}} = \frac{2^5 \cdot 10^{-12 \cdot 5}}{2^2 \cdot 10^{-6}} = \frac{2^5 \cdot 10^{-60}}{2^2 \cdot 10^{-6}} = 2^{5-2} \cdot 10^{-60-(-6)} = 2^3 \cdot 10^{-54} = 8 \cdot 10^{-54}$$

$$c) \frac{6^{13} \cdot 21^{11}}{2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 7^{10}} = \frac{(2 \cdot 3)^{13} \cdot (3 \cdot 7)^{11}}{2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 7^{10}} = \frac{2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 3^{11} \cdot 7^{11}}{2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 7^{10}} = 7^{11-10} \cdot 3^{13+11-24} \cdot 2^{13-14} = 7^1 \cdot 3^0 \cdot 2^{-1} = 7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

110. Hajotetaan kantaluvin 2 eksponentti 6000 tuloksi $3 \cdot 2000$.

$$2^{6000} = 2^{3 \cdot 2000} = (2^3)^{2000} = 8^{2000}$$

Luku $2^{6000} = 8^{2000}$ on suurempi kuin luku 6^{2000} .

111.

$$a) (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$$

$$b) (-1)^{2n+1} = (-1)^1 \cdot (-1)^{2n} = -1 \cdot 1 = -1$$

$$c) \frac{(-5)^n (-5)^n}{25^n} = \frac{(-5 \cdot (-5))^n}{25^n} = \frac{25^n}{25^n} = 25^{n-n} = 25^0 = 1$$

$$d) \frac{(-5)^n (-5)^n}{5^n + 5^n} = \frac{(-5 \cdot (-5))^n}{2 \cdot 5^n} = \frac{25^n}{2 \cdot 5^n} = \frac{(5^2)^n}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^{2n}}{2 \cdot 5^n} = \frac{1}{2} \cdot 5^{2n-n} = \frac{1}{2} \cdot 5^n = \frac{5^n}{2}$$

112. Sievennetään lauseketta.

$$\frac{2 \cdot 4^n \cdot 8^{n+3}}{32^{n+2}} = \frac{2 \cdot (2^2)^n \cdot (2^3)^{n+3}}{(2^5)^{n+2}} = \frac{2 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{3n+9}}{2^{5n+10}} = \frac{2^{5n+10}}{2^{5n+10}} = 1$$

Lausekkeen arvo ei riipu kokonaisluvun n arvosta. Lausekkeen arvo on aina 1.

113.

a) 10^{100}

b) $10^{10^{100}}$

c) $10^{100} \cdot 10^{100} = 10^{100+100} = 10^{200}$

d) $10^{10^{100}} \cdot 10^{10^{100}} = 10^{10^{100}+10^{100}} = 10^{2 \cdot 10^{100}}$

e) $(10^{100})^{10} = 10^{100 \cdot 10} = 10^{1000}$

f) $(10^{100})^{10^{100}} = 10^{100 \cdot 10^{100}} = 10^{10^2 \cdot 10^{100}} = 10^{10^{2+100}} = 10^{10^{102}}$

Luku 2.3

114.

Sijoitetaan luku 2 yhtälöön muuttujan x paikalle:

$$2^{2-1} = 2^{5-2}$$

$$2^1 = 2^3$$

$$2 = 8$$

Epätosi

Joten luku 2 ei ole yhtälön $2^{x-1} = 2^{5-x}$ ratkaisu.

Sijoitetaan luku 3 yhtälöön muuttuja x paikalle:

$$2^{3-1} = 2^{5-3}$$

$$2^2 = 2^2$$

$$4 = 4$$

Tosi

Joten luku 3 on yhtälön $2^{x-1} = 2^{5-x}$ ratkaisu.

Sijoitetaan luku 4 yhtälöön muuttujan x paikalle:

$$2^{4-1} = 2^{5-4}$$

$$2^3 = 2^1$$

$$8 = 2$$

Epätosi

Joten luku 4 ei ole yhtälön $2^{x-1} = 2^{5-x}$ ratkaisu.

Vastaus: 3

115.

a) $5^x = 5^2$
 $x = 2$

b) $7^{2x} = 7^6$
 $2x = 6 \quad | :2$
 $x = 3$

c) $3^{x+1} = (3^2)^5$
 $3^{x+1} = 3^{2 \cdot 5}$
 $3^{x+1} = 3^{10}$
 $x+1 = 10$
 $x = 10 - 1$
 $x = 9$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 9$

116.

a) $4^x = 16$
 $4^x = 4^2$
 $x = 2$

b) $2^x = 16$
 $2^x = 2^4$
 $x = 4$

c) $3^x - 7 = 20$
 $3^x = 20 + 7$
 $3^x = 27$
 $3^x = 3^3$
 $x = 3$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = 3$

117.

a) $5^{2x} + 15 = 40$

$$5^{2x} = 40 - 15$$

$$5^{2x} = 25$$

$$5^{2x} = 5^2$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

b) $(5^3)^x = 5^{24}$

$$5^{3x} = 5^{24}$$

$$3x = 24 \quad | :3$$

$$x = 8$$

c) $25^x = 5^4$

$$(5^2)^x = 5^4$$

$$5^{2x} = 5^4$$

$$2x = 4 \quad | :2$$

$$x = 2$$

Vastaus: a) $x = 1$ b) $x = 8$ c) $x = 2$

118.

a) $9^x = 3^{12}$

$$(3^2)^x = 3^{12}$$

$$3^{2x} = 3^{12}$$

$$2x = 12 \quad | :2$$

$$x = 6$$

b) $5^{2x} = 25$

$$5^{2x} = 5^2$$

$$2x = 2 \quad | :2$$

$$x = 1$$

c) $27^x = 9^6$

$$(3^3)^x = (3^2)^6$$

$$3^{3x} = 3^{12}$$

$$3x = 12 \quad | :3$$

$$x = 4$$

Vastaus: a) $x = 6$ b) $x = 1$ c) $x = 4$

119.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 2^{4x-1} &= 8^x \\ 2^{4x-1} &= (2^3)^x \\ 2^{4x-1} &= 2^{3x} \\ 4x-1 &= 3x \\ 4x-3x &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 64^{x+2} &= 8^{4x} \\ (8^2)^{x+2} &= 8^{4x} \\ 8^{2x+4} &= 8^{4x} \\ 2x+4 &= 4x \\ 2x-4x &= -4 \\ -2x &= -4 && | :(-2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 6^{3x-2} &= 36^x \\ 6^{3x-2} &= (6^2)^x \\ 6^{3x-2} &= 6^{2x} \\ 3x-2 &= 2x \\ 3x-2x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 2$

120.

a) $5^{2x} = 5^2 \cdot 5^x$

$$5^{2x} = 5^{2+x}$$

$$2x = 2 + x$$

$$2x - x = 2$$

$$x = 2$$

b) $3^{2x} = 27 \cdot 3^x$

$$3^{2x} = 3^3 \cdot 3^x$$

$$3^{2x} = 3^{x+3}$$

$$2x = x + 3$$

$$2x - x = 3$$

$$x = 3$$

c)

$$6^{3x} = 36 \cdot 6^x$$

$$6^{3x} = 6^2 \cdot 6^x$$

$$6^{3x} = 6^{2+x}$$

$$3x = 2 + x$$

$$3x - x = 2$$

$$2x = 2 \quad | : 2$$

$$x = 1$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 3$ c) $x = 1$

121.

$$\text{a) } 4 \cdot 5^x = 500 \quad | :4$$

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

$$x = 3$$

$$\text{b) } 6^{x-2} - 6 = 30$$

$$6^{x-2} = 30 + 6$$

$$6^{x-2} = 36$$

$$6^{x-2} = 6^2$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 2 + 2$$

$$x = 4$$

$$\text{c) } 3^{2x} + 20 = 11$$

$$3^{2x} = 11 - 20$$

$$3^{2x} = -9$$

Koska potenssin 3^{2x} arvo on aina positiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: a) $x = 3$ b) $x = 4$ c) Ei ratkaisua.

122.

a) $8^x = 4^{x+3}$
 $(2^3)^x = (2^2)^{x+3}$
 $2^{3x} = 2^{2x+6}$
 $3x = 2x + 6$
 $3x - 2x = 6$
 $x = 6$

b) $4^x = 16 \cdot 2^x$
 $(2^2)^x = 2^4 \cdot 2^x$
 $2^{2x} = 2^{4+x}$
 $2x = 4 + x$
 $2x - x = 4$
 $x = 4$

c) $27^x = 9^{x+1}$
 $(3^3)^x = (3^2)^{x+1}$
 $3^{3x} = 3^{2x+2}$
 $3x = 2x + 2$
 $3x - 2x = 2$
 $x = 2$

Vastaus: a) $x = 6$ b) $x = 4$ c) $x = 2$

123.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{5^6}{5^x} &= 25^x \\ 5^{6-x} &= (5^2)^x \\ 5^{6-x} &= 5^{2x} \\ 6-x &= 2x \\ -x-2x &= -6 \\ -3x &= -6 && | :(-3) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 6 \cdot 6^x &= 36 \\ 6^1 \cdot 6^x &= 6^2 \\ 6^{1+x} &= 6^2 \\ 1+x &= 2 \\ x &= 2-1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{8^x}{2} &= 32 \\ \frac{(2^3)^x}{2^1} &= 2^5 \\ 2^{3x-1} &= 2^5 \\ 3x-1 &= 5 \\ 3x &= 6 && | :3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 2$

124.

a) Luvun 16 neljäkantainen logaritmi merkitään $\log_4 16$.

Koska $4^2 = 16$, niin $\log_4 16 = 2$.

b) Luvun 25 viisikantainen logaritmi merkitään $\log_5 25$.

Koska $5^2 = 25$, niin $\log_5 25 = 2$.

c) Luvun 81 yhdeksänkantainen logaritmi merkitään $\log_9 81$.

Koska $9^2 = 81$, niin $\log_9 81 = 2$.

Vastaus: a) $\log_4 16 = 2$ b) $\log_5 25 = 2$ c) $\log_9 81 = 2$

125.

a) Luvun 27 kolmekantainen logaritmi merkitään $\log_3 27$.

Koska $3^3 = 27$, niin $\log_3 27 = 3$.

b) Luvun 100000 kymmenkantainen logaritmi merkitään $\log_{10} 100\,000$.

Koska $10^5 = 100\,000$, niin $\log_{10} 100\,000 = 5$.

c) Luvun 81 kolmekantainen logaritmi merkitään $\log_3 81$.

Koska $3^4 = 81$, niin $\log_3 81 = 4$.

Vastaus: a) $\log_3 27 = 3$ b) $\log_{10} 100\,000 = 5$ c) $\log_3 81 = 4$

126.

a) $7^x = 21$

$$x = \log_7 21$$

$$x = 1,564... \approx 1,56$$

b) $3^x = 8$

$$x = \log_3 8$$

$$x = 1,892... \approx 1,89$$

c) $9^x = 121$

$$x = \log_9 121$$

$$x = 2,182... \approx 2,18$$

Vastaus: a) $x = \log_7 21 \approx 1,56$ b) $x = \log_3 8 \approx 1,89$ c) $x = \log_9 121 \approx 2,18$

127.

a) $2 \cdot 3^x = 5$ | :2

$$3^x = \frac{5}{2}$$

$$x = \log_3 \frac{5}{2}$$

$$x = 0,8340... \approx 0,83$$

b) $(5^x)^2 = 100$

$$5^{2x} = 100$$

$$2x = \log_5 100$$
 | :2

$$x = \frac{\log_5 100}{2}$$

$$x = 1,430... \approx 1,43$$

c) $1,3^x \cdot 150 = 750$ | :150

$$1,3^x = 5$$

$$x = \log_{1,3} 5$$

$$x = 6,1343... \approx 6,13$$

Vastaus: a) $x = \log_3 \frac{5}{2} \approx 0,83$ b) $x = \frac{\log_5 100}{2} \approx 1,43$ c) $x = \log_{1,3} 5 \approx 6,13$

128.

a) $3 + 5^x = 12$

$$5^x = 9$$

$$x = \log_5 9$$

$$x = 1,3652... \approx 1,37$$

b) $3 \cdot 10^x - 2 = 19$

$$3 \cdot 10^x = 19 + 2$$

$$3 \cdot 10^x = 21 \quad | :3$$

$$10^x = 7$$

$$x = \log_{10} 7$$

$$x = 0,8450... \approx 0,85$$

c) $\frac{2^x}{3} - 4 = 0$

$$\frac{2^x}{3} = 4 \quad | \cdot 3$$

$$2^x = 12$$

$$x = \log_2 12$$

$$x = 3,5849... \approx 3,58$$

Vastaus: a) $x = \log_5 9 \approx 1,37$ b) $x = \log_{10} 7 \approx 0,85$ c) $x = \log_2 12 \approx 3,58$

129.

a) $3^x = 9$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

b) $3^x = 3$

$$3^x = 3^1$$

$$x = 1$$

c) $3^x = 1$

$$3^x = 3^0$$

$$x = 0$$

d) $3^x = \frac{1}{3}$

$$3^x = 3^{-1}$$

$$x = -1$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = 1$ c) $x = 0$ d) $x = -1$

130.

a) $2^x = 2^{-2}$

$$x = -2$$

b) $2^x = \frac{1}{2^4}$

$$2^x = 2^{-4}$$

$$x = -4$$

c) $2^x = \frac{1}{8}$

$$2^x = \frac{1}{2^3}$$

$$2^x = 2^{-3}$$

$$x = -3$$

Vastaus: a) $x = -2$ b) $x = -4$ c) $x = -3$

131.

$$\text{a) } 10 \cdot 2^x = 5 \quad | :10$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

$$\text{b) } 54 \cdot 3^x = 2 \quad | :54$$

$$3^x = \frac{1}{27}$$

$$3^x = \frac{1}{3^3}$$

$$3^x = 3^{-3}$$

$$x = -3$$

c)

$$5^x = 0,04$$

$$5^x = \frac{4}{100}$$

$$5^x = \frac{1}{25}$$

$$5^x = \frac{1}{5^2}$$

$$5^x = 5^{-2}$$

$$x = -2$$

Vastaus: a) $x = -1$ b) $x = -3$ c) $x = -2$

132.

$$\text{a) } 7 \cdot 100^x = 10 \quad | :7$$

$$100^x = \frac{10}{7}$$

$$x = \log_{100} \frac{10}{7}$$

$$x = 0,0774... \approx 0,08$$

$$\text{b) } \frac{48}{4^x} = 2 \quad | \cdot 4^x$$

$$48 = 2 \cdot 4^x \quad | :2$$

$$24 = 4^x$$

$$x = \log_4 24$$

$$x = 2,2924... \approx 2,29$$

c)

$$5 \cdot 3^x = 2 \cdot 4^x \quad | :4^x$$

$$\frac{5 \cdot 3^x}{4^x} = 2 \quad | :5$$

$$\frac{3^x}{4^x} = \frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{2}{5}$$

$$x = \log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}$$

$$x = 3,1850... \approx 3,19$$

Vastaus: a) $x = \log_{100} \frac{10}{7} \approx 0,08$ b) $x = \log_4 24 \approx 2,29$ c) $x = \log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5} \approx 3,19$

133.

a) Lasketaan bakteerien määrä $10\,000 \cdot 8^t$, kun $t = 3$.

$$10\,000 \cdot 8^3 = 5\,120\,000$$

Bakteereja on kolmen tunnin kuluttua 5 120 000 kpl.

b) Bakteerien määrä $10\,000 \cdot 8^t$ tulee olla 640 000. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$10\,000 \cdot 8^t = 640\,000$$

$$t = 2$$

Bakteerien määrä on 640 000 kpl kahden tunnin kuluttua.

c) Bakteerien määrä $10\,000 \cdot 8^t$ tulee olla 15 000. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$10\,000 \cdot 8^t = 15\,000$$

$$t = 0,19498... \text{ (h)}$$

Muutetaan tunnit minuuteiksi: $0,19498... \cdot 60 \text{ min} = 11,6992... \text{ min} \approx 12 \text{ min}$.

Bakteerien määrä on 15 000 kpl noin 12 minuutin kuluttua.

Vastaus: a) 5 120 000 b) 2 tunnin kuluttua b) 12 minuutin kuluttua

134.

a) Kofeiinin määrän $160 \cdot 0,87^t$ tulee olla 100. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$160 \cdot 0,87^t = 100$$

$$t = 3,3749... \approx 3,4$$

Kofeiinin määrä on 100 mg noin 3,4 tunnin kuluttua.

b) Kofeiinin määrän $160 \cdot 0,87^t$ tulee olla 19. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$160 \cdot 0,87^t = 19$$

$$t = 15,300... \approx 15,3$$

Kofeiinin määrä on 19 mg noin 15,3 tunnin kuluttua.

Vastaus: a) 3,4 tunnin kuluttua b) 15,3 tunnin kuluttua

135.

a) Isotoopin I-131 määrän $m \cdot 0,5^x$ tulee olla $\frac{1}{4}m$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$m \cdot 0,5^x = \frac{1}{4}m$$
$$x = 2$$

Määrä on vähentynyt neljäsosaan kahden puoliintumisajan kuluttua. Aikaa kuluu siis

$$2 \cdot 8,02 \text{ vrk} = 16,04 \text{ vrk} \approx 16 \text{ vrk}.$$

Isotoopin I-131 määrä on neljäsosa alkuperäisestä noin 16 vuorokauden kuluttua.

b) Koska määrä on kymmenkertainen turvalliseen määrään verrattuna, tulee isotoopin I-131 määrä $m \cdot 0,5^x$ olla $\frac{1}{10}m$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan x arvo.

$$m \cdot 0,5^x = \frac{1}{10}m \quad | :m$$
$$x = 3,3219\dots$$

Määrä on vähentynyt kymmenesosaan 3,3219... puoliintumisajan kuluttua. Aikaa kuluu siis $3,3219\dots \cdot 8,02 \text{ vrk} = 26,641\dots \text{ vrk} \approx 27 \text{ vrk}$

Isotoopin I-131 määrä on vähentynyt turvalliselle tasolle eli kymmenesosaan alkuperäisestä noin 27 vuorokauden kuluttua.

Vastaus: a) 16 vuorokauden kuluttua b) 27 vuorokauden kuluttua

136.

a) Todistetaan, että logaritmeille pätee yhtälö $\log_k ab = \log_k a + \log_k b$.

1) Oletetaan, että $\log_k a = x$ ja $\log_k b = y$.

Tällöin $a = k^x$ ja $b = k^y$.

2) Nyt $ab = k^x \cdot k^y = k^{x+y}$.

3) Koska $k^{x+y} = ab$, niin tulon ab k -kantainen logaritmi on $\log_k ab = x + y$.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \log_k ab = x + y & \quad \left| \begin{array}{l} x = \log_k a, \\ y = \log_k b \end{array} \right. \\ = \log_k a + \log_k b. \end{aligned}$$

b) Todistetaan, että logaritmeille pätee yhtälö $\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$.

1) Oletetaan, että $\log_k a = x$ ja $\log_k b = y$. Tällöin $a = k^x$ ja $b = k^y$.

2) Nyt $\frac{a}{b} = \frac{k^x}{k^y} = k^{x-y}$.

3) Koska $k^{x-y} = \frac{a}{b}$, niin osamäärän $\frac{a}{b}$ k -kantainen logaritmi on $\log_k \frac{a}{b} = x - y$.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \log_k \frac{a}{b} = x - y & \quad \left| \begin{array}{l} x = \log_k a, \\ y = \log_k b \end{array} \right. \\ = \log_k a - \log_k b. \end{aligned}$$