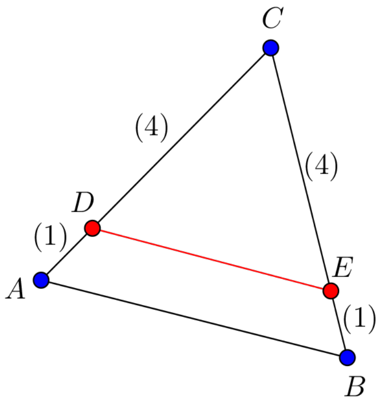
284



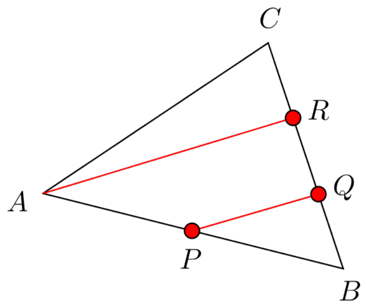
On osoitettava, että jana DE sivun AB kanssa yhdensuuntainen ja sen pituus on $\frac{4}{5}$ sivun AB pituudesta. Pitää siis osoittaa, että $\overline{DE} = \frac{4}{5}\overline{AB}$.

Muodostetaan vektori $\overline{DE}$.

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \overline{DC} + \overline{CE} \\ &= \frac{4}{5}\overline{AC} + \frac{4}{5}\overline{CB} \\ &= \frac{4}{5}(\overline{AC} + \overline{CB}) \\ &= \frac{4}{5}\overline{AB}\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $\overline{DE} = \frac{4}{5}\overline{AB}$. □

285



On osoitettava, että jana AR janan PQ kanssa yhdensuuntainen ja sen pituus on kaksinkertainen janan PQ pituuteen verrattuna. Pitää siis osoittaa, että $\overline{AR} = 2\overline{PQ}$.

Muodostetaan vektori $\overline{AR}$.

$\overline{AR} = \overline{AB} + \overline{BR}$ piste Q on pisteiden B ja R puolivälissä

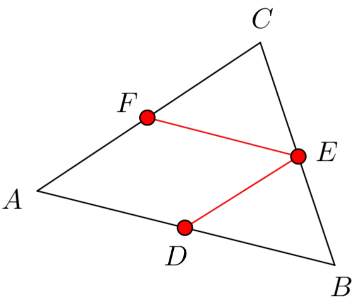
$= 2\overline{PB} + 2\overline{BQ}$

$= 2(\overline{PB} + \overline{BQ})$

$= 2\overline{PQ}$

On siis osoitettu, että $\overline{AR} = 2\overline{PQ}$. □

286



Nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. On siis osoitettava, että $AD \parallel FE$ ja $AF \parallel DE$.

Tarkastellaan nelikulmion sivuvektoreita $\overline{AD}$ ja $\overline{FE}$.

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$\overline{FE} = \overline{FC} + \overline{CE}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CB}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

Koska $\overline{AD} = \overline{FE}$, niin nelikulmion sivut AD ja FE ovat yhdensuuntaiset.

Tarkastellaan vastaavasti nelikulmion sivuvektoreita $\overline{AF}$ ja $\overline{DE}$.

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$\overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$

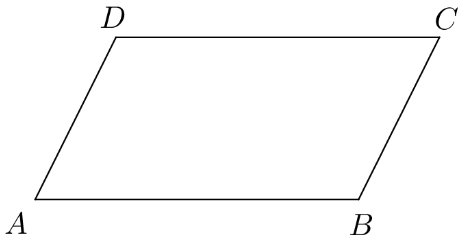
$$= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

Koska $\overline{AF} = \overline{DE}$, niin myös nelikulmion sivut AF ja DE ovat yhdensuuntaiset.

Koska nelikulmion $ADEF$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, nelikulmio $ADEF$ on suunnikas. □

287



Oheisessa nelikulmiossa sivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät, joten $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. On siis osoitettava, että $AD \parallel BC$.

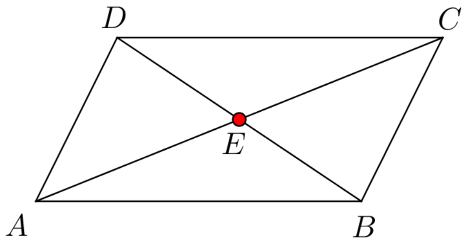
Tarkastellaan nelikulmion sivuvektoria $\overline{BC}$.

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC} \\ &= -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DC} \qquad\qquad \overline{AB} = \overline{DC} \\ &= -\overline{DC} + \overline{AD} + \overline{DC} \\ &= \overline{AD} \end{aligned}$$

Koska $\overline{AD} = \overline{BC}$, niin myös nelikulmion sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset.

Koska nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. $\square$

288



Tutkitaan suunnikasta $ABCD$. Merkitään lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella E.

Merkitään $\overline{AE} = s\overline{AC}$ ja $\overline{BE} = t\overline{BD}$, missä s ja t ovat reaalilukuja. Kertoimien s ja t selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AE}$ kahdella eri tavalla. Valitaan kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= s\overline{AC} \\ &= s(\overline{AB} + \overline{BC}) \\ &= s(\overline{AB} + \overline{AD}) \\ &= s\overline{AB} + s\overline{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \overline{AB} + \overline{BE} \\ &= \overline{AB} + t\overline{BD} \\ &= \overline{AB} + t(\overline{BA} + \overline{AD}) \\ &= \overline{AB} + t(-\overline{AB} + \overline{AD}) \\ &= \overline{AB} - t\overline{AB} + t\overline{AD} \\ &= (1-t)\overline{AB} + t\overline{AD}\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AE} = \overline{AE}$$

$$s\overline{AB} + s\overline{AD} = (1-t)\overline{AB} + t\overline{AD}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

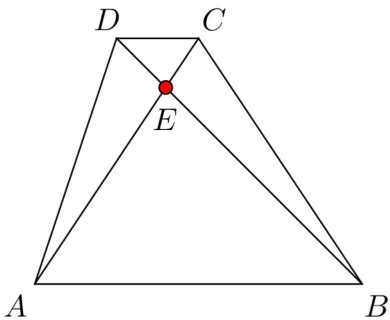
$$\begin{cases} s = 1-t \\ s = t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan (esim. laskimella) $s = \frac{1}{2}$ ja $t = \frac{1}{2}$.

Siten $\overline{AE} = s\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ja $\overline{BE} = t\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BD}$.

Siis lävistäjien leikkauspiste E jakaa molemmat lävistäjät kahteen yhtä suureen osaan, joten lävistäjät puolittavat toisensa. □

289



Tutkitaan puolisuunnikasta $ABCD$, jossa $\overline{AB} = 4\overline{DC}$. Merkitään lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella E.

Merkitään $\overline{AE} = s\overline{AC}$ ja $\overline{BE} = t\overline{BD}$, missä s ja t ovat reaalilukuja. Kertoimien s ja t selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AE}$ kahdella eri tavalla. Valitaan kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{AE} &= s\overline{AC} \\
&= s(\overline{AD} + \overline{DC}) \\
&= s(\overline{AD} + \frac{1}{4}\overline{AB}) \\
&= s\overline{AD} + \frac{1}{4}s\overline{AB} \\
&= \frac{1}{4}s\overline{AB} + s\overline{AD}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{AE} &= \overline{AB} + \overline{BE} \\
&= \overline{AB} + t\overline{BD} \\
&= \overline{AB} + t(\overline{BA} + \overline{AD}) \\
&= \overline{AB} + t(-\overline{AB} + \overline{AD}) \\
&= \overline{AB} - t\overline{AB} + t\overline{AD} \\
&= (1-t)\overline{AB} + t\overline{AD}
\end{aligned}
$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AE} = \overline{AE}$$

$$\frac{1}{4}s\overline{AB} + s\overline{AD} = (1-t)\overline{AB} + t\overline{AD}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}s = 1-t \\ s = t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan (esim. laskimella) $s = \frac{4}{5}$ ja $t = \frac{4}{5}$.

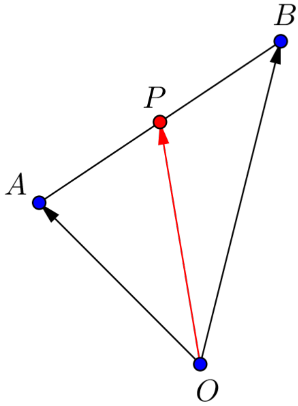
Siten $\overline{AE} = s\overline{AC} = \frac{4}{5}\overline{AC}$ ja $\overline{BE} = t\overline{BD} = \frac{4}{5}\overline{BD}$.

Siis lävistäjien leikkauspiste E jakaa lävistäjän AC suhteessa $4 : 1$ ja lävistäjän BD samoin suhteessa $4 : 1$.

Vastaus Piste E jakaa molemmat lävistäjät AC ja BD suhteessa $4 : 1$.

290

a) Pisteiden A, B ja P paikkavektorit ovat $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OP}$.



Muodostetaan vektori $\overline{OP}$.

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \\
&= \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} \\
&= \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{AO} + \overline{OB}) \\
&= \overline{OA} + \frac{1}{2}(-\overline{OA} + \overline{OB}) \\
&= \overline{OA} - \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB} \\
&= \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB} \\
&= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})
\end{aligned}$$

Siten pisteen P paikkavektori on puolet päätepisteiden paikkavektorien summasta. □

b) Käytetään hyväksi a-kohdan tulosta.

Pisteiden C ja D paikkavektorit ovat $\overline{OC} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$ ja $\overline{OD} = -\overline{i} + 8\overline{j} + 10\overline{k}$.

Paikkavektorien summa on

$$\begin{aligned}\overline{OC} + \overline{OD} &= 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k} - \overline{i} + 8\overline{j} + 10\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 10\overline{j} + 6\overline{k},\end{aligned}$$

joten janan CD keskipisteen paikkavektori on

$$\frac{1}{2}(2\overline{i} + 10\overline{j} + 6\overline{k}) = \overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}$$

ja keskipiste on $(1,5,3)$.

Vastaus b) $(1,5,3)$

291

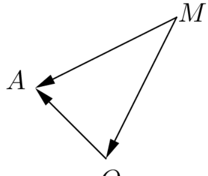
Piste M on kolmion ABC mediaanien leikkauspiste. Tiedetään (ks. esimerkki 4), että pisteen M paikkavektori on
$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, missä $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ ovat pisteiden A, B ja C paikkavektorit.

Tarkastellaan lauseketta $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$.

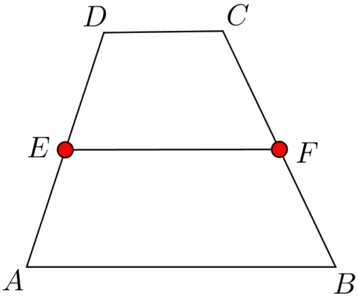
$$\begin{aligned}
\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} &= \overline{MO} + \overline{OA} + \overline{MO} + \overline{OB} + \overline{MO} + \overline{OC} \\
&= 3\overline{MO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\
&= -3\overline{OM} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\
&= -3 \cdot \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\
&= -(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\
&= -\overline{OA} - \overline{OB} - \overline{OC} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\
&= \overline{0}
\end{aligned}$$

Saatiin siis $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$. □

(Yllä laskun ensimmäisessä vaiheessa kukin yhteenlaskettava on kirjoitettu kahden vektorin summana, esim. $\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$.)



292



On osoitettava, että jana EF on kantasivujen AB ja DC suuntainen ja sen pituus on puolet kantasivujen pituuksien summasta. Koska vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{DC}$ ovat samansuuntaiset, pitää osoittaa, että $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$.

Muodostetaan vektori $\overline{EF}$ kahdella eri tavalla.

$$\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CF}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB}$$

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{DA} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$

Lasketaan saadut lausekkeet yhteen.

$$\overline{EF} + \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} + (\frac{1}{2}\overline{DA} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC})$$

$$2\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{DA} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DA} + \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{DC} - \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \overline{AB}$$

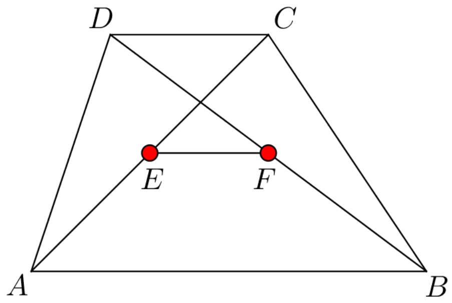
$$= \overline{0} + \overline{DC} + \overline{0} + \overline{AB}$$

$$= \overline{DC} + \overline{AB}$$

$$= \overline{AB} + \overline{DC}$$

Saadaan siis $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$. □

293



On osoitettava, että lävistäjien keskipisteet yhdistävä jana EF on kantasivujen AB ja DC suuntainen. Koska kantasivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset, riittää osoittaa esimerkiksi, että $EF \parallel AB$.
Vektorien avulla ilmaistuna on siis oltava olemassa jokin nollasta eroava reaaliluku r siten, että $\overline{EF} = r\overline{AB}$.

Koska kantasivut AB ja DC ovat yhdensuuntaiset, mutta niiden pituuksien suhdetta ei tiedetä, merkitään $\overline{DC} = t\overline{AB}$, missä t on nollasta eroava reaaliluku.

Muodostetaan vektori $\overline{EF}$ kahdella eri tavalla.

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF} = \frac{1}{2}\overline{CA} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BD}$$

$$\overline{EF} = \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DF}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{DB}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC} - t\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{DB}$$

Lasketaan saadut lausekkeet yhteen.

$$\overline{EF}+\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BD}+(\frac{1}{2}\overline{AC}-t\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{DB})$$

$$2\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}-t\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{DB}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AC}+\overline{AB}-t\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{DB}$$

$$=-\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AC}+(1-t)\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BD}-\frac{1}{2}\overline{BD}$$

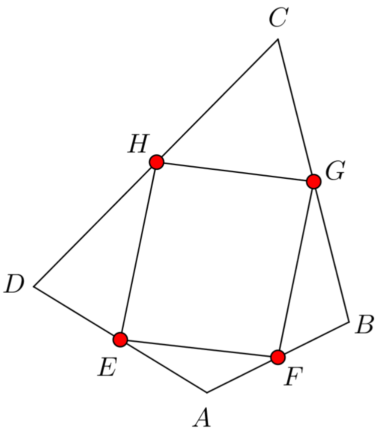
$$=\overline{0}+(1-t)\overline{AB}+\overline{0}$$

$$=(1-t)\overline{AB}$$

Saadaan siis $\overline{EF}=\frac{1-t}{2}\overline{AB}$ eli vaadittua muotoa $\overline{EF}=r\overline{AB}$ oleva lauseke. Siten jana EF on kantasivun AB (ja myös DC) suuntainen. □

HUOM. Yllä yhtälössä $\overline{EF}=r\overline{AB}$ luvun r pitää olla nollasta eroava, joten yhtälössä $\overline{EF}=\frac{1-t}{2}\overline{AB}$ luku t ei saa olla 1. Tämä onkin tilanne, sillä jos $t=1$, niin $\overline{DC}=t\overline{AB}=\overline{AB}$ ja puolisuunnikas on itse asiassa suunnikas. Tällöin lävistäjien keskipisteet E ja F yhtyvät ja jana EF typistyy pisteeksi.

294



Oheisen nelikulmion $ABCD$ sivujen keskipisteet on yhdistetty peräkkäin siten, että on muodostunut nelikulmio $EFGH$. On osoitettava, että nelikulmio $EFGH$ on suunnikas.

Nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. On siis osoitettava, että $EF \parallel HG$ ja $EH \parallel FG$.

Tarkastellaan nelikulmion $EFGH$ sivuvektoreita $\overline{EF}$ ja $\overline{HG}$.

$$\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AF}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{DA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{DB}$$

$$\overline{HG} = \overline{HC} + \overline{CG}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{CB}) = \frac{1}{2}\overline{DB}$$

Koska $\overline{EF} = \overline{HG}$, niin nelikulmion sivut EF ja HG ovat yhdensuuntaiset.

Tarkastellaan vastaavasti nelikulmion $EFGH$ sivuvektoreita $\overline{EH}$ ja $\overline{FG}$.

$$\overline{EH} = \overline{ED} + \overline{DH}$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC}$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

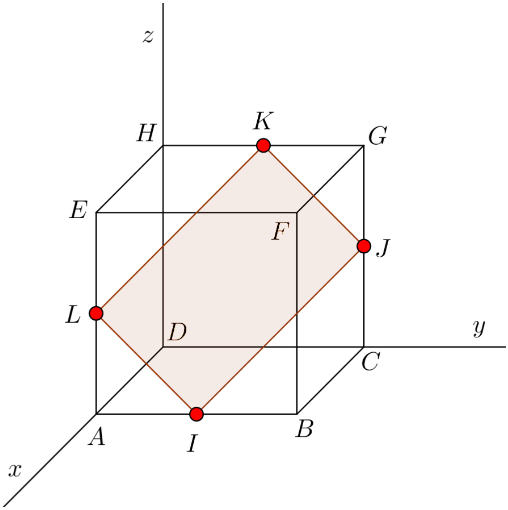
$$\overline{FG} = \overline{FB} + \overline{BG}$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

Koska $\overline{EH} = \overline{FG}$, niin myös nelikulmion sivut EH ja FG ovat yhdensuuntaiset.

Koska nelikulmion $EFGH$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, nelikulmio $EFGH$ on suunnikas. □

HUOM. Tehtävän 287 tuloksen nojalla riittäisi osoittaa, että $\overline{EF} = \overline{HG}$ tai $\overline{EH} = \overline{FG}$.

295



Sijoitetaan särmiö koordinaatistoon siten, että kärki D on origossa ja kärjet A, C ja H positiivisilla koordinaattiakseleilla.

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a sekä kuution muita pisteitä kuvan mukaisesti. Pisteet I, J, K ja L ovat särmien keskipisteitä.

a) On osoitettava, että nelikulmion $IJKL$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan vektorit $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{IL}$ ja $\overline{LK}$.

$$\begin{aligned}\overline{IJ} &= \overline{IB} + \overline{BC} + \overline{CJ} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CG} \\ &= \frac{1}{2}a\overline{j} - a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{k} \\ &= -a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{JK} &= \overline{JG} + \overline{GK} \\ &= \frac{1}{2}\overline{CG} + \frac{1}{2}\overline{GH} \\ &= \frac{1}{2}a\overline{k} - \frac{1}{2}a\overline{j} \\ &= -\frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{IL} &= \overline{IA} + \overline{AL} \\ &= \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AE} \\ &= -\frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{LK} &= \overline{LE} + \overline{EH} + \overline{HK} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AE} + \overline{EH} + \frac{1}{2}\overline{HG} \\ &= \frac{1}{2}a\overline{k} - a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} \\ &= -a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}\end{aligned}$$

Koska $\overline{IJ} = \overline{LK}$ ja $\overline{JK} = \overline{IL}$, niin nelikulmion $IJKL$ vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset. □

b) Nelikulmio $IJKL$ on suorakulmio, jos vierekkäiset sivut ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa eli jos vastaavien sivuvektorien pistetulot ovat nollia. Lasketaan vierekkäisten sivuvektorien pistetulot.

$$\overline{IJ} \cdot \overline{JK} = (-a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}) \cdot (-\frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k})$$

$$= (-a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}) \cdot (0\overline{i} - \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k})$$

$$= -a \cdot 0 + \frac{1}{2}a \cdot (-\frac{1}{2}a) + \frac{1}{2}a \cdot (\frac{1}{2}a)$$

$$= 0 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

$$\overline{IJ} \cdot \overline{IL} = (-a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}) \cdot (-\frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k})$$

$$= \overline{IJ} \cdot \overline{JK}$$

$$= 0$$

$$\overline{IL} \cdot \overline{LK} = (-\frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}) \cdot (-a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k})$$

$$= (0\overline{i} - \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k}) \cdot (-a\overline{i} + \frac{1}{2}a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{k})$$

$$= 0 \cdot (-a) - \frac{1}{2}a \cdot (\frac{1}{2}a) + \frac{1}{2}a \cdot (\frac{1}{2}a)$$

$$= 0 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

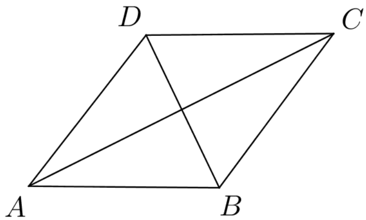
$$\overline{JK}\cdot\overline{LK} = (-\frac{1}{2}a\overline{j}+\frac{1}{2}a\overline{k})\cdot(-a\overline{i}+\frac{1}{2}a\overline{j}+\frac{1}{2}a\overline{k})$$

$$= \overline{IL}\cdot\overline{LK}$$

$$= 0$$

Koska vierekkäisten sivuvektorien pistetulot ovat nollia, nelikulmio $IJKL$ on suorakulmio. □

296



a) Nelikulmio on neljäkäs, jos kaikki sen sivut ovat yhtä pitkät. On osoitettava, että neljäkkään lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Tarkastellaan neljäkästä $ABCD$. Esitetään lävistäjävektorit $\overline{AC}$ ja $\overline{BD}$ vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AD}$$

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$$

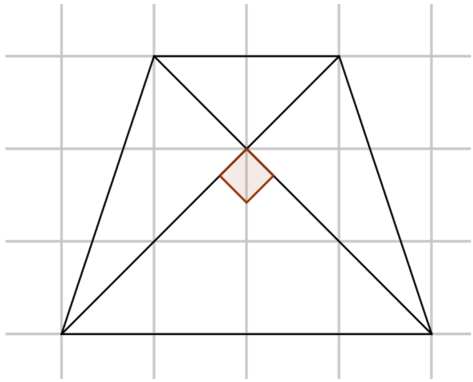
Lasketaan lävistäjävektorien pistetulo.

$$\begin{aligned}
\overline{AC} \cdot \overline{BD} &= (\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot (-\overline{AB} + \overline{AD}) \\
&= \overline{AB} \cdot (-\overline{AB}) + \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{AD} \cdot (-\overline{AB}) + \overline{AD} \cdot \overline{AD} \\
&= -\overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AD} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{AD} \\
&= -\left|\overline{AB}\right|^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AB} \cdot \overline{AD} + \left|\overline{AD}\right|^2 \\
&= -\left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{AD}\right|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Viimeinen vaihe seuraa siitä, että neljäkkään sivuina vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ ovat yhtä pitkät eli $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$.

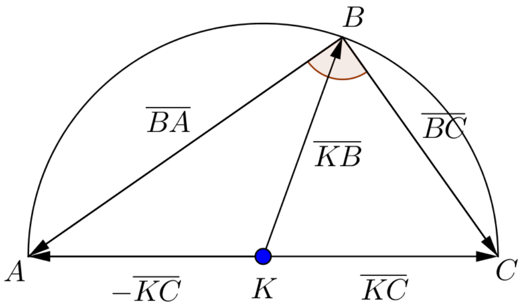
Koska lävistäjävektorien pistetulo on nolla, lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$

b) Kuten kuvasta nähdään, nelikulmio ei aina ole neljäkäs, vaikka sen lävistäjät olisivatkin toisiaan vastaan kohtisuorassa.



Vastaus b) ei ole

297



Kehäkulma B on suora, kun vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Määritetään vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ keskipisteestä K lähtevien vektorien $\overline{KB}$ ja $\overline{KC}$ avulla. Nämä kelpaavat kantavektoreiksi, koska ne ovat erisuuntaiset ja kumpikaan ei ole nollavektori.

$$\overline{BA} = -\overline{KB} - \overline{KC}$$

$$\overline{BC} = -\overline{KB} + \overline{KC}$$

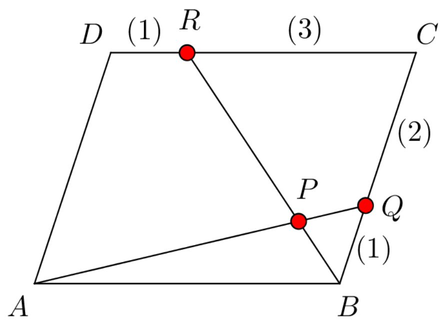
Lasketaan vektorien $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ pistetulo.

$$
\begin{aligned}
\overline{BA} \cdot \overline{BC} &= (-\overline{KB} - \overline{KC}) \cdot (-\overline{KB} + \overline{KC}) \\
&= -\overline{KB} \cdot (-\overline{KB}) - \overline{KB} \cdot \overline{KC} - \overline{KC} \cdot (-\overline{KB}) - \overline{KC} \cdot \overline{KC} \\
&= \overline{KB} \cdot \overline{KB} - \overline{KB} \cdot \overline{KC} + \overline{KC} \cdot \overline{KB} - \overline{KC} \cdot \overline{KC} \\
&= \left|\overline{KB}\right|^2 - \overline{KB} \cdot \overline{KC} + \overline{KB} \cdot \overline{KC} - \left|\overline{KC}\right|^2 \\
&= \left|\overline{KB}\right|^2 - \left|\overline{KC}\right|^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Viimeinen vaihe seuraa siitä, että (puoli)ympyrän säteinä vektorit $\overline{KB}$ ja $\overline{KC}$ ovat yhtä pitkät eli $\left|\overline{KB}\right| = \left|\overline{KC}\right|$.

Koska pistetulo $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$, niin vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja kehäkulma B on suora. □

298



Tutkitaan oheisen kuvan suunnikasta $ABCD$. Merkitään $\overline{AP} = s\overline{AQ}$ ja $\overline{BP} = t\overline{BR}$, missä s ja t ovat reaalilukuja. Kertoimien s ja t selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AP}$ kahdella eri tavalla. Valitaan kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned}
\overline{AP} &= s\overline{AQ} \\
&= s(\overline{AB} + \overline{BQ}) \\
&= s(\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{BC}) \\
&= s(\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD}) \\
&= s\overline{AB} + \frac{1}{3}s\overline{AD}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{AP} &= \overline{AB} + \overline{BP} \\
&= \overline{AB} + t\overline{BR} \\
&= \overline{AB} + t(\overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DR}) \\
&= \overline{AB} + t(-\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{4}\overline{DC}) \\
&= \overline{AB} + t(-\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{4}\overline{AB}) \\
&= \overline{AB} - t\overline{AB} + t\overline{AD} + \frac{1}{4}t\overline{AB} \\
&= (1 - \frac{3}{4}t)\overline{AB} + t\overline{AD}
\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AP} = \overline{AP}$$

$$s\overline{AB} + \frac{1}{3}s\overline{AD} = (1 - \frac{3}{4}t)\overline{AB} + t\overline{AD}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} s = 1 - \frac{3}{4}t \\ \frac{1}{3}s = t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan (esim. laskimella) $s = \frac{4}{5}$ ja $t = \frac{4}{15}$.

Siten $\overline{AP} = s\overline{AQ} = \frac{4}{5}\overline{AQ}$ ja $\overline{BP} = t\overline{BR} = \frac{4}{15}\overline{BR}$.

Siis leikkauspiste P jakaa

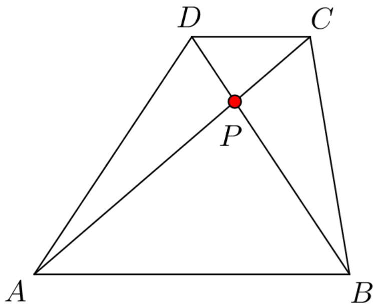
a) janan AQ suhteessa $4:1$ ($\frac{4}{5}$ ja $\frac{1}{5}$)

ja

b) janan BR suhteessa $4:11$ ($\frac{4}{15}$ ja $\frac{11}{15}$).

Vastaus a) suhteessa $4:1$
b) suhteessa $4:11$

299



Tutkitaan puolisuunnikasta $ABCD$. Koska sivujen AB ja DC pituuksien suhde on $m : n$, niin $\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{DC}$. Merkitään lävistäjien leikkauspistettä kirjaimella P.

Merkitään $\overline{AP} = s\overline{AC}$ ja $\overline{BP} = t\overline{BD}$, missä s ja t ovat reaalilukuja. Kertoimien s ja t selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AP}$ kahdella eri tavalla. Valitaan kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= s\overline{AC} \\ &= s(\overline{AD} + \overline{DC}) \\ &= s(\overline{AD} + \frac{n}{m}\overline{AB}) \\ &= s\overline{AD} + \frac{n}{m}s\overline{AB} \\ &= \frac{n}{m}s\overline{AB} + s\overline{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{AB} + \overline{BP} \\ &= \overline{AB} + t\overline{BD} \\ &= \overline{AB} + t(\overline{BA} + \overline{AD}) \\ &= \overline{AB} + t(-\overline{AB} + \overline{AD}) \\ &= \overline{AB} - t\overline{AB} + t\overline{AD} \\ &= (1-t)\overline{AB} + t\overline{AD}\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AP} = \overline{AP}$$

$$\frac{n}{m}s\overline{AB} + s\overline{AD} = (1-t)\overline{AB} + t\overline{AD}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

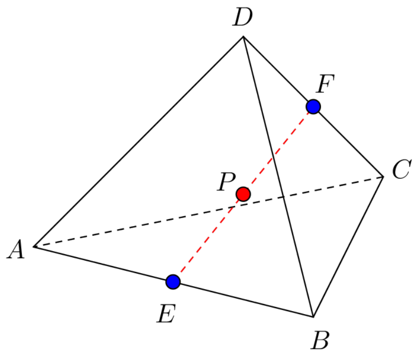
$$\begin{cases} \frac{n}{m}s = 1-t \\ \quad s = t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan (esim. laskimella) $s = \frac{m}{m+n}$ ja $t = \frac{m}{m+n}$.

Siten $\overline{AP} = s\overline{AC} = \frac{m}{m+n}\overline{AC}$ ja $\overline{BP} = t\overline{BD} = \frac{m}{m+n}\overline{BD}$.

Koska siis lävistäjien leikkauspisteen P toisella puolella on lävistäjästä $\frac{m}{m+n}$ osaa, jää toiselle puolelle $\frac{n}{m+n}$ osaa, joten leikkauspiste P jakaa lävistäjät AC ja BD suhteessa $m : n$. □

300



Tetraedrin kärkipisteiden paikkavektorit ovat $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ja $\overline{OD}$.

Käytetään hyväksi tehtävän 290 a-kohdan tulosta: janan keskipisteen paikkavektori on puolet janan päätepisteiden paikkavektorien summasta.

Siten pisteen E paikkavektori $\overline{OE}$ on

$$\overline{OE} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$

Vastaavasti pisteen F paikkavektori $\overline{OF}$ on

$$\overline{OF} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD}).$$

Lopuksi pisteen P paikkavektoriksi $\overline{OP}$ saadaan

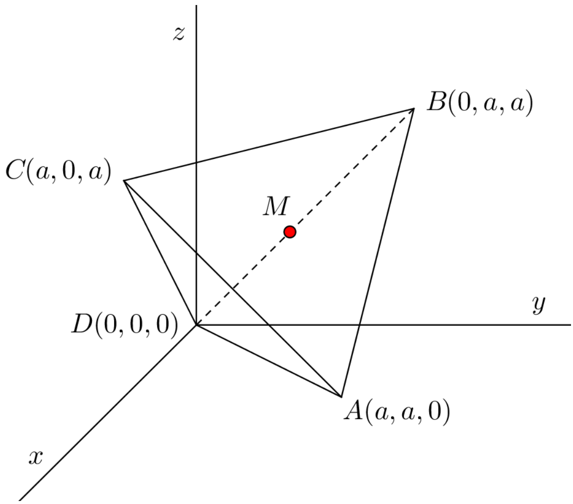
$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \frac{1}{2}(\overline{OE}+\overline{OF}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})+\frac{1}{2}(\overline{OC}+\overline{OD})) \\ &= \frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB})+\frac{1}{4}(\overline{OC}+\overline{OD}) \\ &= \frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}).\end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa, että pisteen P paikkavektori on tetraedrin kärkipisteiden paikkavektorien keskiarvo. Koska saadussa lausekkeessa kärkipisteet A, B, C ja D ovat tasaveroisessa asemassa, voidaan päätellä, että sama piste P saataisiin tetraedrin minkä tahansa vastakkaisten särmien keskipisteiden yhdysjanan keskipisteenä. Kaikki kyseiset yhdysjanat kulkevat siis saman pisteen P kautta.

Kolmion painopisteen (eli mediaanien leikkauspisteen) M paikkavektorille $\overline{OM}$ saatiin esimerkissä 4 tulos $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$. Tässä tehtävässä saatu tulos on kolmiota koskevan tuloksen ilmeinen yleistys, joten piste P voidaan ymmärtää tetraedrin painopisteeksi.

Vastaus $\quad \overline{OP} = \frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. Piste P on tetraedrin painopiste.

301



Sijoitetaan tetraedri koordinaatistoon siten, että huippu D on origossa ja pohjakolmion kärjet A, B ja C sijaitsevat kuvan mukaisesti. Piste M on pohjakolmion ABC mediaanien leikkauspiste.

(On helppo vakuuttua, että kyseinen tetraedri on säännöllinen eli kaikki sen särmät ovat yhtä pitkät. Esim. särmävektori $\overline{DA} = a\overline{i} + a\overline{j}$, joten särmän pituus on $\left|\overline{DA}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$. Särmävektori $\overline{AB} = -a\overline{i} + a\overline{k}$, joten särmän pituus on $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-a)^2 + 0^2 + a^2} = \sqrt{2}a$ ja samoin muille särmille.)

On osoitettava, että pohjakolmion ABC mediaanien leikkauspisteen M ja tetraedrin huipun D välinen vektori on kohtisuorassa pohjakolmion mediaanivektoria vastaan. Muodostetaan kyseiset vektorit ja lasketaan niiden pistetulo.

Mediaanien leikkauspisteen M paikkavektorille $\overline{OM}$ saatiin esimerkissä 4 tulos $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, joten nyt

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}((a\overline{i} + a\overline{j}) + (a\overline{j} + a\overline{k}) + (a\overline{i} + a\overline{k}))$$

$$= \frac{1}{3}(2a\overline{i} + 2a\overline{j} + 2a\overline{k})$$

$$= \frac{2a}{3}\overline{i} + \frac{2a}{3}\overline{j} + \frac{2a}{3}\overline{k}$$

eli pisteeksi M saadaan $M(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{2a}{3})$.

Tetraedrin huipun D ja mediaanien leikkauspisteen M välinen vektori on $\overline{DM} = \overline{OM} = \frac{2a}{3}\overline{i} + \frac{2a}{3}\overline{j} + \frac{2a}{3}\overline{k}$, sillä piste D sijaitsee origossa.

Mediaanivektoreita on kolme, mutta koska tilanne on nyt symmetrinen, voidaan tarkastella vain yhtä mediaanivektoria. Valitaan vektoriksi $\overline{AM}$. Piste A on $(a, a, 0)$, joten

$$\overline{AM} = (\frac{2a}{3} - a)\overline{i} + (\frac{2a}{3} - a)\overline{j} + (\frac{2a}{3} - 0)\overline{k}$$

$$= -\frac{a}{3}\overline{i} - \frac{a}{3}\overline{j} + \frac{2a}{3}\overline{k}.$$

Lasketaan vektorien $\overline{DM}$ ja $\overline{AM}$ pistetulo.

$$\overline{DM} \cdot \overline{AM} = (\frac{2a}{3}\overline{i} + \frac{2a}{3}\overline{j} + \frac{2a}{3}\overline{k}) \cdot (-\frac{a}{3}\overline{i} - \frac{a}{3}\overline{j} + \frac{2a}{3}\overline{k})$$

$$= \frac{2a}{3} \cdot (-\frac{a}{3}) + \frac{2a}{3} \cdot (-\frac{a}{3}) + \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3}$$

$$= -\frac{2a^2}{9} - \frac{2a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} = 0$$

Pistetulo on nolla, joten vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

□