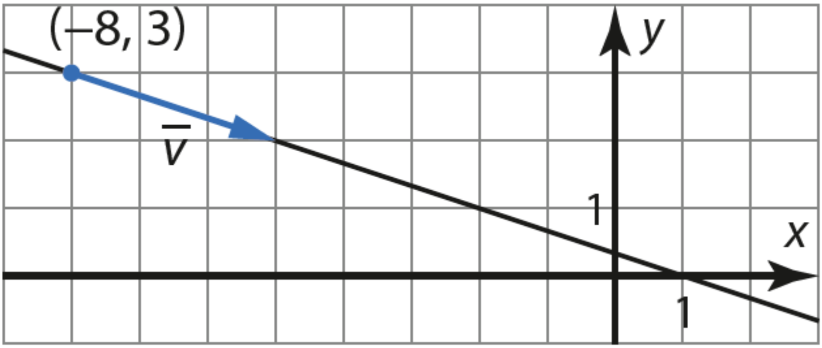
212



Suoran pisteitä ovat esimerkiksi $(-5,2)$, $(-2,1)$, $(1,0)$, $(4,-1)$ ja $(-11,4)$.

Vastaus esimerkiksi $(-5,2)$, $(-2,1)$, $(1,0)$, $(4,-1)$ ja $(-11,4)$

213

Merkitään pistettä $(5,-1,-2)$ kirjaimella B. Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{OB}$, jonka lauseke on

$$\overline{OB} = 5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}.$$

Suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = t\overline{OB} = t(5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku.

Vastaus $\overline{OP} = t(5\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k})$, missä t on reaaliluku.

214

a) Muodostetaan vektorin $\overline{OA}$ lauseke.

$$\overline{OA} = 6\overline{i} - \overline{j} + 0\overline{k} = 6\overline{i} - \overline{j}$$

Suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v} = 6\overline{i} - \overline{j} + t(-2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku.

b) Suoralla oleva piste saadaan määritettyä, kun suoran vektoriyhtälössä luvulle t valitaan jokin arvo. Voidaan valita esimerkiksi $t = 1$ ja $t = 2$.

Kun $t = 1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= 6\overline{i} - \overline{j} + 1 \cdot (-2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= 6\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k} \\ &= 4\overline{i} + 3\overline{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(4, 0, 3)$.

Kun $t = 2$,

$$\overline{OP} = 6\overline{i} - \overline{j} + 2\cdot(-2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k})$$

$$= 6\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$$

$$= 2\overline{i} + \overline{j} + 6\overline{k}.$$

Saadaan piste $(2,1,6)$.

Vastaus a) $\overline{OP} = 6\overline{i} - \overline{j} + t(-2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k})$, missä t on reaaliluku.
b) esimerkiksi $(4,0,3)$ ja $(2,1,6)$

215

a) Suoran suuntavektoriksi $\overline{v}$ voidaan valita vektori $\overline{AB}$. Muodostetaan vektorin $\overline{AB}$ lauseke.

$$\overline{AB} = (4-1)\overline{i} + (-11-(-7))\overline{j} + (14-9)\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} - 4\overline{j} + 5\overline{k} \quad (= \overline{v})$$

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 1$, $y_0 = -7$ ja $z_0 = 9$ sekä $v_x = 3$, $v_y = -4$ ja $v_z = 5$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = \quad 1 + 3t \\ y = -7 - 4t \\ z = \quad 9 + 5t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

b) Sijoitetaan pisteen $P(-5,0,-1)$ koordinaatit $x=-5$, $y=0$ ja $z=-1$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t.

$$\begin{cases} -5 = 1+3t \\ 0 = -7-4t \\ -1 = 9+5t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=-2 \\ t=-\dfrac{7}{4} \\ t=-2 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, piste $P(-5,0,-1)$ ei ole suoralla.

Sijoitetaan sitten pisteen $Q(31,-47,59)$ koordinaatit $x=31$, $y=-47$ ja $z=59$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t.

$$\begin{cases} 31 = 1+3t \\ -47 = -7-4t \\ 59 = 9+5t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=10 \\ t=10 \\ t=10 \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, piste $Q(31,-47,59)$ on suoralla.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 1+3t \\ y=-7-4t, \text{ missä } t \text{ on reaaliluku} \\ z = 9+5t \end{cases}$

b) piste P ei ole suoralla, piste Q on

216

Määritettään ensin suoran parametriesitys. Esitys on muotoa

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 6$, $y_0 = 0$ ja $z_0 = 8$ sekä $v_x = 1$, $v_y = 3$ ja $v_z = -4$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 6 + t \\ y = \phantom{6+{}} 3t, \quad \text{missä } t \text{ on reaaliluku.} \\ z = 8 - 4t \end{cases}$$

Suoran ja yz-tason leikkauspisteen x-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(0, y, z)$. Ratkaistaan parametri t.

$$x = 6 + t$$

$$0 = 6 + t$$

$$t = -6$$

Lasketaan leikkauspisteen y- ja z-koordinaatit.

$$y = 3t = 3 \cdot (-6) = -18$$

$$z = 8 - 4t = 8 - 4 \cdot (-6) = 32$$

Leikkauspiste on $(0, -18, 32)$.

Vastaus $(0, -18, 32)$

217

Suoran suuntavektoriksi $\overline{v}$ voidaan valita vektori $\overline{AB}$.
Muodostetaan vektorin $\overline{AB}$ lauseke.

$$\overline{AB} = (5-(-7))\overline{i} + (-8-13)\overline{j} + (9-(-9))\overline{k}$$

$$= 12\overline{i} - 21\overline{j} + 18\overline{k} \quad (= \overline{v})$$

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = -7$, $y_0 = 13$ ja $z_0 = -9$ sekä $v_x = 12$, $v_y = -21$ ja $v_z = 18$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = -7 + 12t \\ y = 13 - 21t \\ z = -9 + 18t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan pisteen $P(1,-1,3)$ koordinaatit $x=1$, $y=-1$ ja $z=3$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t.

$$\begin{cases} 1=-7+12t \\ -1=13-21t \\ 3=-9+18t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{2}{3} \\ t=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, piste $P(1,-1,3)$ on suoralla.

Vastaus on suoralla

218

Pisteen $A(2,-1,0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{u} = \overline{i} + 7\overline{j} + 3\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Pisteen $B(6,12,11)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 6 + 2s \\ y = 12 - s \\ z = 11 + 5s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Suoran leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2 + t = 6 + 2s \\ -1 + 7t = 12 - s \\ 3t = 11 + 5s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = 2$ ja $s = -1$.

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $t = 2$ pisteen A kautta kulkevan suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2 + 2 = 4 \\ y = -1 + 7t = -1 + 14 = 13 \\ z = 3t = 6 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(4,13,6)$.

Vastaus $(4,13,6)$

219

Muodostetaan pisteiden $A(7,-5,4)$ ja $B(9,-7,-2)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\overline{AB} = (9-7)\overline{i} + (-7-(-5))\overline{j} + (-2-4)\overline{k}$$
$$= 2\overline{i} - 2\overline{j} - 6\overline{k}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -5 - 2t \\ z = 4 - 6t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(0,0,15)$ ja $D(6,-3,12)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\overline{CD} = (6-0)\overline{i} + (-3-0)\overline{j} + (12-15)\overline{k}$$
$$= 6\overline{i} - 3\overline{j} - 3\overline{k}$$

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 6s \\ y = -3s \\ z = 15 - 3s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z), niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 7+2t=6s \\ -5-2t=-3s \\ 4-6t=15-3s \end{cases}$$

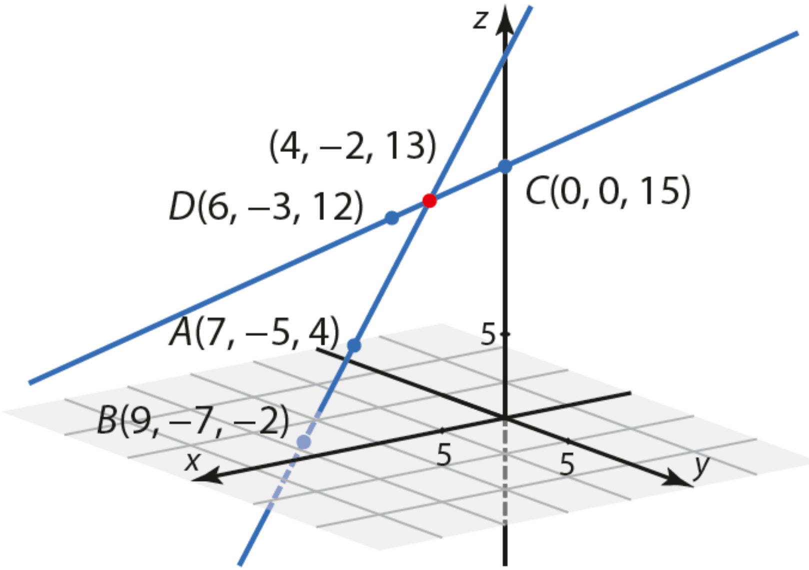
Yhtälöryhmän ratkaisu on $t=-\frac{3}{2}$ ja $s=\frac{2}{3}$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suorat leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $s=\frac{2}{3}$ suoran CD parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=6s=6\cdot\frac{2}{3}=4 \\ y=-3s=-3\cdot\frac{2}{3}=-2 \\ z=15-3s=15-2=13 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(4,-2,13)$.

Tehtävän tarkistus piirtämällä geometriaohjelmalla:



Vastaus Suorat leikkaavat pisteessä $(4,-2,13)$.

220

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$|\overline{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned}\overline{u} \cdot \overline{v} &= (\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}) \\ &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = -1\end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}$$

$$\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v}) = \cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}}) = 96,26...^\circ \approx 96^\circ$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on tylppä, kysytty suorien välinen kulma on sen vieruskulma

$$180^\circ - 96^\circ = 84^\circ.$$

Vastaus 84°

221

Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\overline{AB} = (3-(-5))\overline{i} + (1-1)\overline{j} + (4-10)\overline{k}$$

$$= 8\overline{i} + 0\overline{j} - 6\overline{k} = 8\overline{i} - 6\overline{k}$$

$$\overline{CD} = (3-0)\overline{i} + (1-(-3))\overline{j} + (4-4)\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} + 4\overline{j} + 0\overline{k} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$$

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (8\overline{i} + 0\overline{j} - 6\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + 4\overline{j} + 0\overline{k})$$

$$= 8 \cdot 3 + 0 \cdot 4 - 6 \cdot 0 = 24$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|} = \frac{24}{10 \cdot 5} = \frac{12}{25}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \cos^{-1}(\frac{12}{25}) = 61{,}31...^\circ \approx 61^\circ$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on terävä, kysytty suorien välinen kulma on myös 61°.

Vastaus 61°

222

Suorat l ja m ovat sama suora, jos ne kulkevat saman pisteen kautta ja jos niillä on yhdensuuntaiset suuntavektorit.

Osoitetaan ensin, että suorat kulkevat saman pisteen kautta. Osoitetaan esimerkiksi, että suora l kulkee suoralla m sijaitsevan pisteen $B(-21,7,14)$ kautta.

Suoran l suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{OA}$, jonka lauseke on $\overline{OA} = 15\overline{i} - 5\overline{j} - 10\overline{k}$. Suora kulkee origon kautta, joten sen parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \quad 15t \\ y = \quad -5t \\ z = -10t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Tutkitaan, sijaitseeko piste $B(-21,7,14)$ suoralla l. Sijoitetaan pisteen $B(-21,7,14)$ koordinaatit $x = -21$, $y = 7$ ja $z = 14$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t.

$$\begin{cases} -21 = \quad 15t \\ \quad 7 = \quad -5t \\ \; 14 = -10t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -\dfrac{7}{5} \\ t = -\dfrac{7}{5} \\ t = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu, piste $B(-21,7,14)$ on suoralla l. Siten molemmat suora kulkevat saman pisteen kautta.

Osoitetaan sitten, että suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

Suoran m suuntavektori on $\overline{v} = -9\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k}$. Edellä todettiin, että suoran l suuntavektori on $\overline{OA} = 15\overline{i} - 5\overline{j} - 10\overline{k}$.

Vektorit $\overline{v}$ ja $\overline{OA}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{v} = r\overline{OA}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{v} = r\overline{OA}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{v} = r\overline{OA}$$

$$-9\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} = r(15\overline{i} - 5\overline{j} - 10\overline{k})$$

$$-9\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} = 15r\overline{i} - 5r\overline{j} - 10r\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} -9 = 15r \\ 3 = -5r \\ 6 = -10r \end{cases}$$

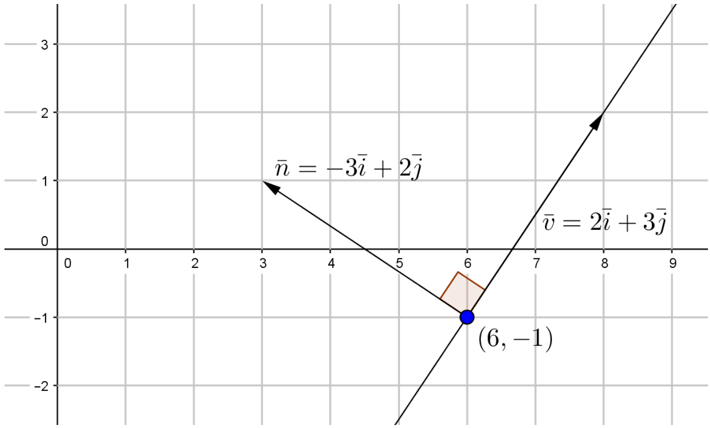
Ratkaistaan kaikista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = -\dfrac{3}{5} \\ r = -\dfrac{3}{5} \\ r = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Saatiin yksikäsitteinen ratkaisu $r = -\frac{3}{5}$, joten $\overline{v} = -\frac{3}{5}\overline{OA}$. Siten molempien suorien l ja m suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

On osoitettu, että molemmat suorat kulkevat saman pisteen kautta ja suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset. Suorat ovat siten sama suora. □

223



a) Normaalivektori $\overline{n}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan. Kuvan perusteella näyttää siltä, että suoran suuntavektoriksi voidaan valita esimerkiksi vektori $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$. Vahvistetaan havainto laskemalla vektorien $\overline{n} = -3\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{v}$ pistetulo.

$$\overline{n} \cdot \overline{v} = (-3\overline{i} + 2\overline{j}) \cdot (2\overline{i} + 3\overline{j})$$

$$= -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0$$

Koska pistetulo $\overline{n} \cdot \overline{v} = 0$, vektorit $\overline{n}$ ja $\overline{v}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, joten vektori $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$ käy suoran suuntavektoriksi.

Suora kulkee pisteen $(6, -1)$ kautta ja sen suuntavektori on $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -1 + 3t, \end{cases} \quad \text{missä } t \text{ on reaaliluku.}$$

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x,0)$. Ratkaistaan parametri t.

$$y=-1+3t$$

$$0=-1+3t$$

$$t=\frac{1}{3}$$

Lasketaan leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$x=6+2t=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{20}{3},0)$.

Suoran ja y-akselin leikkauspisteen x-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(0,y)$. Ratkaistaan parametri t.

$$x=6+2t$$

$$0=6+2t$$

$$t=-3$$

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$$y=-1+3t=-1+3\cdot(-3)=-10$$

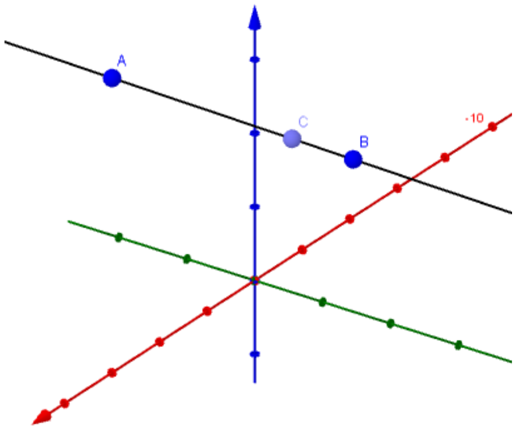
Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,-10)$.

Vastaus a) $\begin{cases} x = \quad 6+2t \\ y=-1+3t, \end{cases}$ missä t on reaaliluku

b) pisteissä $(\frac{20}{3},0)$ ja $(0,-10)$

224

a) Sijoitetaan koordinaatistoon pisteet $A(6,0,8)$ ja $B(3,5,6)$ ja piirretään niiden kautta kulkeva suora. Lisätään suoralle AB kolmas piste (kuvassa C), jota liikutellaan suoralla ja jonka koordinaattien arvoja luetaan.



Suoran ja yz-tason leikkauspisteessä x-koordinaatti on nolla. Liikutetaan piste C sellaiseen kohtaan, jossa sen x-koordinaatti on nolla. Piste on $(0,10,4)$.

b) Suoran ja xy-tason leikkauspisteessä z-koordinaatti on nolla. Liikutetaan piste C sellaiseen kohtaan, jossa sen z-koordinaatti on nolla. Piste on $(-6,20,0)$.

Vastaus a) $(0,10,4)$

b) $(-6,20,0)$

225

a) Muodostetaan vektorin $\overline{OA}$ lauseke.

$$\overline{OA} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + 0\overline{k} = 3\overline{i} + 8\overline{j}$$

Lentosuoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + t(-2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku. Fysikaalisesti tulkittuna luku t on aika sekunneissa, joka on kulunut raketin laukaisusta.

b) Raketti räjähtää, kun $t = 3$. Määritetään kysytty piste lentosuoran vektoriyhtälön avulla.

$$\overline{OP} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + 3\cdot(-2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k})$$

$$= 3\overline{i} + 8\overline{j} - 6\overline{i} - 15\overline{j} + 117\overline{k}$$

$$= -3\overline{i} - 7\overline{j} + 117\overline{k}$$

Raketti räjähtää pisteessä $(-3, -7, 117)$. Raketti on tuolloin 117 metrin korkeudella (z-koordinaatin arvo).

Vastaus a) $\overline{OP} = 3\overline{i} + 8\overline{j} + t(-2\overline{i} - 5\overline{j} + 39\overline{k}),$ missä t on reaaliluku.

b) 117 metrin korkeudella pisteessä $(-3, -7, 117)$

226

a) Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x t \\ y = y_0 + u_y t \\ z = z_0 + u_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ ja $z_0 = 0$ sekä $u_x = 1$, $u_y = 7$ ja $u_z = 3$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

b) Suoran ja xz-tason leikkauspisteen y-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, 0, z)$. Ratkaistaan parametri t.

$$y = -1 + 7t$$

$$0 = -1 + 7t$$

$$-7t = -1$$

$$t = \frac{1}{7}$$

Lasketaan leikkauspisteen x- ja z-koordinaatit.

$$x = 2 + t = 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$z = 3t = \frac{3}{7}$$

Leikkauspiste on $(\frac{15}{7}, 0, \frac{3}{7})$.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 7t, \\ z = 3t \end{cases}$ missä t on reaaliluku

b) $(\frac{15}{7}, 0, \frac{3}{7})$

227

Suoran suuntavektoriksi $\overline{v}$ voidaan valita vektori $\overline{AB}$.
Muodostetaan vektorin $\overline{AB}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (0-3)\overline{i} + (4-3)\overline{j} + (5-0)\overline{k} \\ &= -3\overline{i} + \overline{j} + 5\overline{k} \quad (= \overline{v})\end{aligned}$$

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \\ z = z_0 + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 3$, $y_0 = 3$ ja $z_0 = 0$ sekä $v_x = -3$, $v_y = 1$ ja $v_z = 5$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3 + t \\ z = 5t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan pisteen $C(9,1,-9)$ koordinaatit $x=9$, $y=1$ ja $z=-9$ yhtälöryhmään ja ratkaistaan jokaisesta yhtälöstä t.

$$\begin{cases} 9 = 3 - 3t \\ 1 = 3 + t \\ -9 = 5t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Koska yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, piste $C(9,1,-9)$ ei ole suoralla.

Vastaus ei ole suoralla

228

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset.

Suoran $\overline{OP} = 2\overline{i} - \overline{k} + t(\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k})$ lausekkeesta voidaan suoraan lukea, että suoran suuntavektori on $\overline{u} = \overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

Vastaavasti suoran $\begin{cases} x = \quad 5 - 2s \\ y = \qquad\quad 6s \\ z = -1 - 4s \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat luettavissa parametrin s kertoimista, joten suuntavektoriksi saadaan $\overline{v} = -2\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{k}$.

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu. Voitaisiin muodostaa yhtälö ja ratkaista saatava yhtälöryhmä, mutta voidaan myös huomata suoraan, että $\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k} = -\frac{1}{2} \cdot (-2\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{k})$ eli $\overline{u} = -\frac{1}{2}\overline{v}$. Siten suorien suuntavektorit ovat yhdensuuntaiset, joten myös suorat ovat yhdensuuntaiset. □

229

Muodostetaan pisteiden $A(2,-1,8)$ ja $B(5,-1,-7)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\overline{AB} = (5-2)\overline{i} + (-1-(-1))\overline{j} + (-7-8)\overline{k}$$
$$= 3\overline{i} + 0\overline{j} - 15\overline{k} = 3\overline{i} - 15\overline{k}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = \ \ 2 + \ \ 3t \\ y = -1 \\ z = \ \ 8 - 15t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(0,-13,3)$ ja $D(2,-5,3)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\overline{CD} = (2-0)\overline{i} + (-5-(-13))\overline{j} + (3-3)\overline{k}$$
$$= 2\overline{i} + 8\overline{j} + 0\overline{k} = 2\overline{i} + 8\overline{j}$$

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = \qquad 2s \\ y = -13 + 8s \\ z = \ \ 3, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Suoran leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2+3t=2s \\ -1=-13+8s \\ 8-15t=3 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t=\frac{1}{3}$ ja $s=\frac{3}{2}$.

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $t=\frac{1}{3}$ suoran AB parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=2+3t=2+1=3 \\ y=-1 \\ z=8-15t=8-5=3 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(3,-1,3)$.

Vastaus $(3,-1,3)$

230

Pisteestä $A(-1,0,4)$ lähtevän lasersäteen suuntavektori on $\overline{u} = \overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, joten sädettä vastaavan suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = \quad 3t, \quad \text{missä } t \text{ on reaaliluku.} \\ z = \ 4 - t \end{cases}$$

Pisteestä $B(3,2,-6)$ lähtevän lasersäteen suuntavektori on $\overline{v} = -2\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, joten sädettä vastaavan suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \ 3 - 2s \\ y = \ 2 - \ s, \quad \text{missä } s \text{ on reaaliluku.} \\ z = -6 + 4s \end{cases}$$

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z), niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} -1 + t = 3 - 2s \\ 3t = 2 - s \\ 4 - t = -6 + 4s \end{cases}$$

Osoittautuu, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Siten lasersäteitä vastaavat suorat eivät leikkaa toisiaan.

Vastaus eivät leikkaa

231

Pisteen P paikkavektori on suoran vektoriyhtälö, joten pisteet P piirtävät suoran, kun parametri t käy läpi kaikki reaaliluvut.

Suoran $\overline{OP} = (2\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}) + t(-\overline{i} + 10\overline{j} + 3\overline{k})$ parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -4 + 10t \\ z = 1 + 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $A(-2,-8,2)$ ja $B(4,12,4)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (4-(-2))\overline{i} + (12-(-8))\overline{j} + (4-2)\overline{k} \\ &= 6\overline{i} + 20\overline{j} + 2\overline{k} \end{aligned}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = -2 + 6s \\ y = -8 + 20s \\ z = 2 + 2s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Piste P on suoralla AB, jos suorat leikkaavat toisensa. Tutkitaan, onko suorilla jollakin parametrin t arvolla leikkauspiste (x, y, z), jolloin pisteen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2-t=-2+6s \\ -4+10t=-8+20s \\ 1+3t=2+2s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t=\dfrac{7}{10}$ ja $s=\dfrac{11}{20}$.

Siten suorat leikkaavat toisensa (ja piste P on suoralla AB), kun $t=\dfrac{7}{10}$.

Vastaus $\quad t=\dfrac{7}{10}$

232

Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\overline{AB} = (-3-(-2))\overline{i} + (0-(-1))\overline{j} + (4-5)\overline{k}$$

$$= -\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$$

$$\overline{CD} = (1-(-3))\overline{i} + (-4-0)\overline{j} + (8-5)\overline{k}$$

$$= 4\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}$$

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{41}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (-\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}) \cdot (4\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k})$$

$$= -1 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 3 = -11$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{CD}\right|} = \frac{-11}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{41}}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \cos^{-1}\left(-\frac{11}{\sqrt{3}\sqrt{41}}\right) = 172{,}67...° \approx 173°$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on tylppä, kysytty suorien välinen kulma on sen vieruskulma $180° - 173° = 7°$.

Vastaus 7°

233

Suora AB leikkaa suoran CD kohtisuorasti, jos suorat leikkaavat toisensa ja jos niiden suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Osoitetaan ensin, että suorien suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Määritetään suorien suuntavektorit.

$$\overline{AB} = (5-3)\overline{i} + (4-5)\overline{j} + (1-(-2))\overline{k}$$

$$= 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$$

$$\overline{CD} = (9-9)\overline{i} + (5-(-1))\overline{j} + (8-6)\overline{k}$$

$$= 0\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k} = 6\overline{j} + 2\overline{k}$$

Lasketaan suuntavektorien pistetulo.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}) \cdot (0\overline{i} + 6\overline{j} + 2\overline{k})$$

$$= 2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 0$$

Koska pistetulo $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Osoitetaan sitten, että suorat leikkaavat toisensa.

Pisteiden $A(3,5,-2)$ ja $B(5,4,1)$ kautta kulkevan suoran parametriesitys on (suuntavektori $\overline{AB}$ laskettiin jo edellä)

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Pisteiden $C(9,-1,6)$ ja $D(9,5,8)$ kautta kulkevan suoran parametriesitys on (suuntavektori $\overline{CD}$ laskettiin jo edellä)

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -1 + 6s \\ z = 6 + 2s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z), niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 3 + 2t = 9 \\ 5 - t = -1 + 6s \\ -2 + 3t = 6 + 2s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t = 3$ ja $s = \dfrac{1}{2}$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suorat leikkaavat toisensa.

On osoitettu, että suorien suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja suorat leikkaavat toisensa. Siten suora AB leikkaa suoran CD kohtisuorasti. $\square$

234

Pisteestä $A(-2,12,0)$ lähtevän lentosuoran suuntavektori on $\overline{v} = -2\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$, joten lentosuoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 12 - 5t \\ z = \quad\quad\;\; t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Lentokone on x-akselin yläpuolella silloin, kun lentosuora leikkaa xz-tason. Suoran ja xz-tason leikkauspisteen y-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, 0, z)$. Ratkaistaan parametri t.

$$y = 12 - 5t$$

$$0 = 12 - 5t$$

$$t = \frac{12}{5}$$

Lasketaan leikkauspisteen x- ja z-koordinaatit.

$$x = -2 - 2t = -2 - \frac{24}{5} = -\frac{34}{5} = -6,8$$

$$z = t = \frac{12}{5} = 2,4$$

Siten lentokone ylittää rautatien pisteessä $(-6,8;\ 0;\ 2,4)$. Lentokone on tällöin 2,4 kilometrin korkeudella (z-koordinaatin arvo).

Vastaus 2,4 km korkeudella pisteessä $(-6,8;\ 0;\ 2,4)$

235

a) Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AP}$.
Muodostetaan vektorin $\overline{AP}$ lauseke.

$$\overline{AP} = (x-1)\overline{i} + (y-(-1))\overline{j}$$
$$= (x-1)\overline{i} + (y+1)\overline{j}$$

Normaalivektori $\overline{n} = -3\overline{i} + 5\overline{j}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan. Siten vektorien $\overline{n}$ ja $\overline{AP}$ pistetulon täytyy olla nolla. Ehdosta saadaan yhtälö pisteen $P(x, y)$ koordinaateille x ja y.

$$\overline{n} \cdot \overline{AP} = 0$$
$$(-3\overline{i} + 5\overline{j}) \cdot ((x-1)\overline{i} + (y+1)\overline{j}) = 0$$
$$-3 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y+1) = 0$$
$$-3x + 3 + 5y + 5 = 0$$
$$-3x + 5y + 8 = 0$$

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti on nolla. Ratkaistaan leikkauspisteen x-koordinaatti a-kohdassa johdetun yhtälön avulla.

$$-3x+5y+8=0$$

$$-3x+0+8=0$$

$$x=\frac{8}{3}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{8}{3},0)$.

Suoran ja y-akselin leikkauspisteen x-koordinaatti on nolla. Ratkaistaan leikkauspisteen y-koordinaatti a-kohdassa johdetun yhtälön avulla.

$$-3x+5y+8=0$$

$$0+5y+8=0$$

$$y=-\frac{8}{5}$$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,-\frac{8}{5})$.

Vastaus a) $-3x+5y+8=0$

b) $(\frac{8}{3},0)$ ja $(0,-\frac{8}{5})$

236

On määritettävä jokin vektori $\overline{c} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, joka on kohtisuorassa vektoreita $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = \overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}$ vastaan. Näin on täsmälleen silloin, kun molemmat pistetulot $\overline{a} \cdot \overline{c}$ ja $\overline{b} \cdot \overline{c}$ ovat nollia.

Muodostetaan ja ratkaistaan syntyvät kaksi yhtälöä eli yhtälöpari.

$$\overline{a} \cdot \overline{c} = 0$$

$$(3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = 0$$

$$3x - y + z = 0$$

$$\overline{b} \cdot \overline{c} = 0$$

$$(\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = 0$$

$$x + 5y + z = 0$$

Päädyttiin siis yhtälöpariin

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

Poistetaan saadusta yhtälöparista muuttuja z ja ratkaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + z = 0 \\ \ x + 5y + z = 0 \end{cases} \qquad | \cdot (-1)$$

$$+\begin{cases} -3x + \ \ y - z = 0 \\ \ \ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$-2x + 6y \quad = 0$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

Sijoitetaan $y = \frac{1}{3}x$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja z muuttujan x avulla.

$$3x - y + z = 0$$

$$3x - \frac{1}{3}x + z = 0$$

$$z = -\frac{8}{3}x$$

On siis saatu $y = \frac{1}{3}x$ ja $z = -\frac{8}{3}x$. Jos valitaan esimerkiksi $x = -3$, saadaan $y = -1$ ja $z = 8$, joten vektoriksi $\overline{c}$ saadaan $\overline{c} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = -3\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k}$. Siis vihreä lasersäde lähetetään suuntaan $-3\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k}$.

Vastaus suuntaan $-3\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k}$

HUOM 1. Kannattaa vielä tarkistaa suoralla laskulla, että yhtälöt $\overline{a} \cdot \overline{c} = 0$ ja $\overline{b} \cdot \overline{c} = 0$ toteutuvat, kun $\overline{c} = -3\overline{i} - \overline{j} + 8\overline{k}$.

HUOM 2. Jos muuttujan x arvoksi olisi valittu positiivinen luku, muuttuja z olisi ollut negatiivinen. Tällöin vektorin $\overline{c} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ z-akselin suuntainen komponentti osoittaisi alaspäin eli vihreä lasersäde ammuttaisiin kohti maata, mikä tuskin on järkevää. Siksi muuttujan x arvoksi on valittava negatiivinen luku.

237

Pisteen $A(20,0,8)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{u} = -4\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 20 - 4t \\ y = \phantom{20 - {}} 3t \\ z = 8 + 2t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Pisteen $B(-4,32,0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{v} = -6\overline{i} + \overline{j} + 7\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -4 - 6s \\ y = 32 + s \\ z = \phantom{-4 - {}} 7s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Tutkitaan ensin, leikkaavatko suorat (lasersäteet) toisensa.

Jos suorilla on leikkauspiste (x, y, z), niin sen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 20 - 4t = -4 - 6s \\ 3t = 32 + s \\ 8 + 2t = 7s \end{cases}$$

Osoittautuu, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten suorat eivät leikkaa toisiaan.

Määritetään sitten suorien (lasersäteiden) risteämiskohta, kun säteitä katsotaan alhaalta. Risteämiskohdassa suorien x- ja y-koordinaatit ovat yhtä suuret, joten kyseisen kohdan (x, y) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöpari (edellisen yhtälöryhmän ensimmäinen ja toinen yhtälö) ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 20-4t=-4-6s \\ 3t=32+s \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $t=12$ ja $s=4$.

Selvitetään lopuksi, kumpi risteävistä suorista (lasersäteistä) on ylempänä. Lasketaan suorien z-koordinaatti sijoittamalla $t=12$ pisteen A kautta kulkevan suoran parametriesitykseen ja $s=4$ pisteen B kautta kulkevan suoran parametriesitykseen.

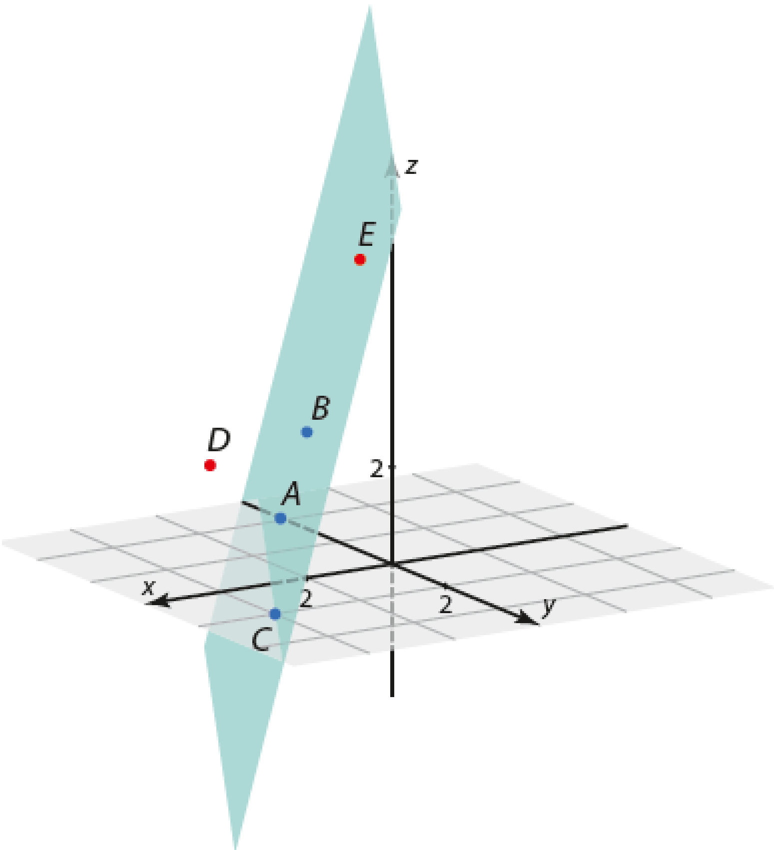
$$z=8+2t=8+2\cdot 12=32$$

$$z=7s=7\cdot 4=28$$

Siis pisteen A kautta kulkeva säde on $32-28=4$ metriä ylempänä.

Vastaus Säteet eivät leikkaa. Punainen lasersäde on 4 metriä ylempänä.

238



a) Kuvan perusteella piste $D(3,-2,2)$ ei voi olla tasossa.

b) Kuvan perusteella piste $E(2,2,7)$ voi olla tasossa.

Vastaus a) ei voi
b) voi

239

a) Pisteen $A(2,-1,3)$ paikkavektori on $\overline{OA}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$. Pisteen A kautta kulkevan tason suuntavektorit ovat $\overline{u}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$ ja $\overline{v}=4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$. Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP}=\overline{OA}+s\overline{u}+t\overline{v}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}+s(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})+t(4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Voidaan valita esimerkiksi $s=1$ ja $t=0$ sekä $s=0$ ja $t=1$.

Kun $s=1$ ja $t=0$,

$$\begin{aligned}\overline{OP}&=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}+1\cdot(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})+0\cdot(4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})\\&=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}+\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}\\&=3\overline{i}+2\overline{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(3,0,2)$.

Kun $s=0$ ja $t=1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP}&=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}+0\cdot(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})+1\cdot(4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})\\&=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}+4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}\\&=6\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(6,-3,4)$.

Vastaus a) $\overline{OP}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}+s(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})+t(4\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k})$,
missä s ja t ovat reaalilukuja
b) esimerkiksi $(3,0,2)$ ja $(6,-3,4)$

240

a) Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.
Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\overline{AB} = (-5-(-3))\overline{i} + (2-(-1))\overline{j} + (1-2)\overline{k}$$

$$= -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$$

$$\overline{AC} = (-2-(-3))\overline{i} + (3-(-1))\overline{j} + (-4-2)\overline{k}$$

$$= \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$$

b) Pisteen $A(-3,-1,2)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$.
Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} = -3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + s(-2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Vastaus a) $\overline{AB} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{AC} = \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$
b) $\overline{OP} = -3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + s(-2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k})$,
missä s ja t ovat reaalilukuja

241

a) Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ ja $z_0 = 1$ sekä $u_x = 1$, $u_y = -2$ ja $u_z = 1$ sekä $v_x = -3$, $v_y = 1$ ja $v_z = -2$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 2 + \quad s - 3t \\ y = \quad -2s + \quad t \\ z = 1 + \quad s - 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Sijoitetaan pisteen $P(11,-8,8)$ koordinaatit $x=11$, $y=-8$ ja $z=8$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 11 = 2 + s - 3t \\ -8 = -2s + t \\ 8 = 1 + s - 2t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s=3$ ja $t=-2$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $P(11,-8,8)$ on tasossa. □

Vastaus a) $\begin{cases} x = 2 + s - 3t \\ y = -2s + t, \\ z = 1 + s - 2t \end{cases}$ missä s ja t ovat reaalilukuja

242

a) Tason suuntavektoreiksi $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$. Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\overline{AB} = (4-1)\overline{i} + (3-0)\overline{j} + (0-4)\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k} \qquad (= \overline{u})$$

$$\overline{AC} = (-1-1)\overline{i} + (-2-0)\overline{j} + (3-4)\overline{k}$$

$$= -2\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k} \qquad (= \overline{v})$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt esimerkiksi $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ja $z_0 = 4$ sekä $u_x = 3$, $u_y = 3$ ja $u_z = -4$ sekä $v_x = -2$, $v_y = -2$ ja $v_z = -1$.
Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 1 + 3s - 2t \\ y = \phantom{1+{}} 3s - 2t \\ z = 4 - 4s - t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Sijoitetaan pisteen $D(4,3,\frac{7}{4})$ koordinaatit $x=4$, $y=3$ ja $z=\frac{7}{4}$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 4 = 1 + 3s - 2t \\ 3 = \quad\;\; 3s - 2t \\ \frac{7}{4} = 4 - 4s - \;\; t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s = \frac{15}{22}$ ja $t = -\frac{21}{44}$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $D(4,3,\frac{7}{4})$ on tasossa.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 1 + 3s - 2t \\ y = \quad\;\; 3s - 2t, \\ z = 4 - 4s - \;\; t \end{cases}$ missä s ja t ovat reaalilukuja

b) on

243

a) Merkitään pistettä $(4,0,-2)$ kirjaimella A. Parametriesitystä varten tarvitaan pisteen A lisäksi kaksi muuta tason pistettä B ja C. Määritetään annetulta suoralta kaksi pistettä sijoittamalla parametrille r kaksi arvoa, esimerkiksi arvot 0 ja 1.

Sijoitetaan $r = 0$.

$$\begin{cases} x = 1 - 4r = 1 - 4 \cdot 0 = 1 \\ y = -1 - 3r = -1 - 3 \cdot 0 = -1 \\ z = 1 - r = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

Saadaan piste $B(1,-1,1)$.

Sijoitetaan $r = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 - 4r = 1 - 4 \cdot 1 = -3 \\ y = -1 - 3r = -1 - 3 \cdot 1 = -4 \\ z = 1 - r = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $C(-3,-4,0)$.

Muodostetaan tasolle kaksi suuntavektoria.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (1-4)\overline{i} + (-1-0)\overline{j} + (1-(-2))\overline{k} \\ &= -3\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= (-3-4)\overline{i} + (-4-0)\overline{j} + (0-(-2))\overline{k} \\ &= -7\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k} \end{aligned}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \quad 4 - 3s - 7t \\ y = \qquad\; - s - 4t \\ z = -2 + 3s + 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Tason ja z-akselin leikkauspiste on muotoa $(0,0,z)$. Määritetään parametrien s ja t arvot sijoittamalla parametriesityksen kahteen ensimmäiseen yhtälöön $x = 0$ ja $y = 0$ ja ratkaisemalla yhtälöpari laskimella.

$$\begin{cases} 0 = 4 - 3s - 7t \\ 0 = \qquad - s - 4t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \dfrac{16}{5}$ ja $t = -\dfrac{4}{5}$.

Lasketaan leikkauspisteen z-koordinaatti parametriesityksen viimeisen yhtälön avulla.

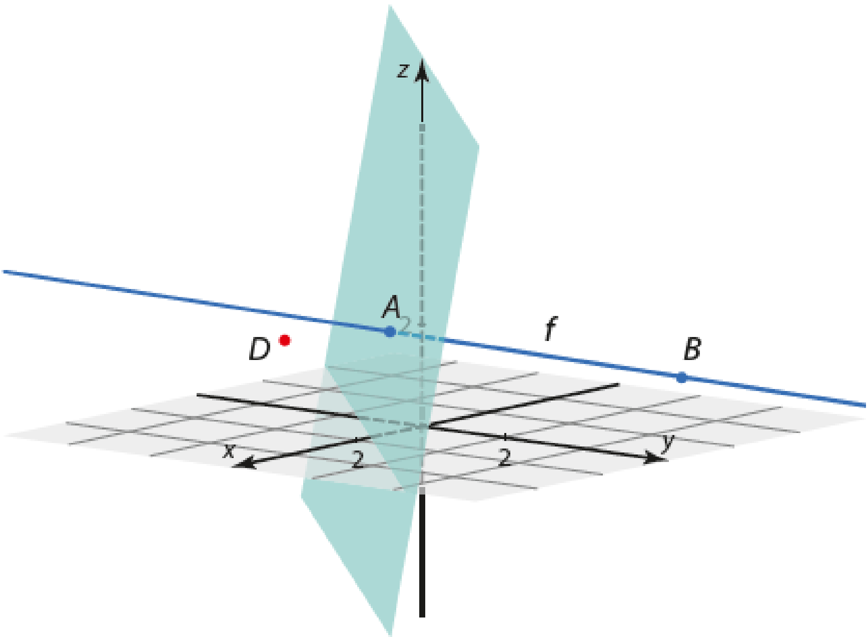
$$\begin{aligned} z &= -2 + 3s + 2t \\ &= -2 + 3 \cdot \frac{16}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0,0,6)$.

Vastaus a) $\begin{cases} x = \phantom{-2+{}} 4 - 3s - 7t \\ y = -s - 4t, \\ z = -2 + 3s + 2t \end{cases}$ missä s ja t ovat reaalilukuja

b) $(0,0,6)$

244



Kuvan perusteella piste $D(3,-1,2)$ ei ole tasossa.

Vastaus ei ole

245

a) Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

missä nyt pisteen koordinaatit $x_0=2$, $y_0=1$ ja $z_0=-1$ sekä normaalivektorin kertoimet $a=5$, $b=-2$ ja $c=3$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)&=0 \\ 5\cdot(x-2)-2\cdot(y-1)+3\cdot(z-(-1))&=0 \\ 5x-10-2y+2+3z+3&=0 \\ 5x-2y+3z-5&=0 \end{aligned}$$

b) Tutkitaan, toteuttavatko pisteen $P(2,4,1)$ koordinaatit tason yhtälön.

$$\begin{aligned} 5x-2y+3z-5&=0 \\ 5\cdot2-2\cdot4+3\cdot1-5&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

tosi

Pisteen P koordinaatit toteuttavat tason yhtälön, joten piste on tasossa.

Vastaus a) $5x-2y+3z-5=0$
b) on

246

Muodostetaan vektorin $\overline{AB}$ lauseke.

$$\overline{AB} = (-2-5)\overline{i} + (5-0)\overline{j} + (-1-(-4))\overline{k}$$

$$= -7\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}$$

Koska taso on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, vektori $\overline{AB}$ voidaan valita tason normaalivektoriksi.

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0,$$

missä nyt pisteen P koordinaatit $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ ja $z_0 = 5$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = -7$, $b = 5$ ja $c = 3$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) &= 0 \\ -7\cdot(x-1) + 5\cdot(y-(-2)) + 3\cdot(z-5) &= 0 \\ -7x + 7 + 5y + 10 + 3z - 15 &= 0 \\ -7x + 5y + 3z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus $\quad -7x + 5y + 3z + 2 = 0$

HUOM. Yhtälö on matemaattisesti identtinen kirjassa vastauksena annetun yhtälön $7x - 5y - 3z - 2 = 0$ kanssa. Jälkimmäiseen muotoon päädyttäisiin suoraan, jos normaalivektoriksi olisi valittu $-\overline{AB} = \overline{BA}$.

247

Suoran ja tason leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat sekä suoran parametriesityksen että tason yhtälön. Sijoitetaan suoran parametriesityksestä koordinaattien lausekkeet $x = 5 + 3t$, $y = -\frac{1}{2} - 2t$ ja $z = -\frac{7}{2} - 3t$ tason yhtälöön $7x + y - 2z = 4$.

$$\begin{aligned} 7 \cdot (5 + 3t) + (-\frac{1}{2} - 2t) - 2 \cdot (-\frac{7}{2} - 3t) &= 4 \\ 25t + \frac{83}{2} &= 4 \\ t &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Koska parametrille t saadaan ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit sijoittamalla arvo $t = -\frac{3}{2}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 5 + 3t = 5 + 3 \cdot (-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} - 2t = -\frac{1}{2} - 2 \cdot (-\frac{3}{2}) = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{7}{2} - 3t = -\frac{7}{2} - 3 \cdot (-\frac{3}{2}) = 1 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1)$.

Vastaus pisteessä $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1)$

248

Suoran ja tason leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat sekä tason että suoran parametriesityksen. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 13-2t=1+3r+2s \\ -21+3t=5r-s \\ 14-\quad t=2+8r+14s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r=-\dfrac{6}{13}$, $s=\dfrac{9}{13}$ ja $t=6$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla arvo $t=6$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} 13-2t=13-2\cdot 6=1 \\ -21+3t=-21+3\cdot 6=-3 \\ 14-t=14-6=8 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(1,-3,8)$.

Vastaus $(1,-3,8)$

249

a) Suoran $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -8 - 3t \\ z = 11 + 7t \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat

luettavissa parametrin t kertoimista, joten (erääksi) suuntavektoriksi saadaan $\overline{v} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k}$.

xy-tason normaalivektoriksi voidaan valita $\overline{n} = \overline{k}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{62}$$

$$|\overline{n}| = 1$$

$$\overline{v} \cdot \overline{n} = (2\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k}) \cdot \overline{k}$$

$$= 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 7$$

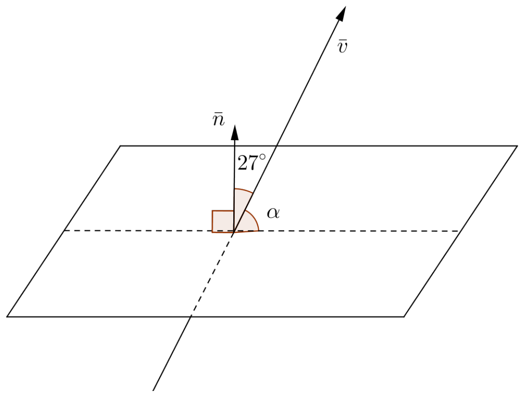
Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{v}, \overline{n}) = \frac{\overline{v} \cdot \overline{n}}{|\overline{v}||\overline{n}|} = \frac{7}{\sqrt{62} \cdot 1}$$

$$\sphericalangle(\overline{v}, \overline{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{62}}\right) = 27{,}25...° \approx 27°$$

Kuvan perusteella suora leikkaa tason kulmassa $\alpha = 90° - 27° = 63°$.

(Kuva havainnollistaa kulmia, mutta vektorien pituuksien suhteet ovat kuvassa väärin.)



b) yz-tason normaalivektoriksi voidaan valita $\overline{n} = \overline{i}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo ($|\overline{v}|$ laskettiin jo a-kohdassa).

$|\overline{n}| = 1$, $\qquad \overline{v} \cdot \overline{n} = (2\overline{i} - 3\overline{j} + 7\overline{k}) \cdot \overline{i} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 2$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{v}, \overline{n}) = \frac{\overline{v} \cdot \overline{n}}{|\overline{v}||\overline{n}|} = \frac{2}{\sqrt{62} \cdot 1}$$

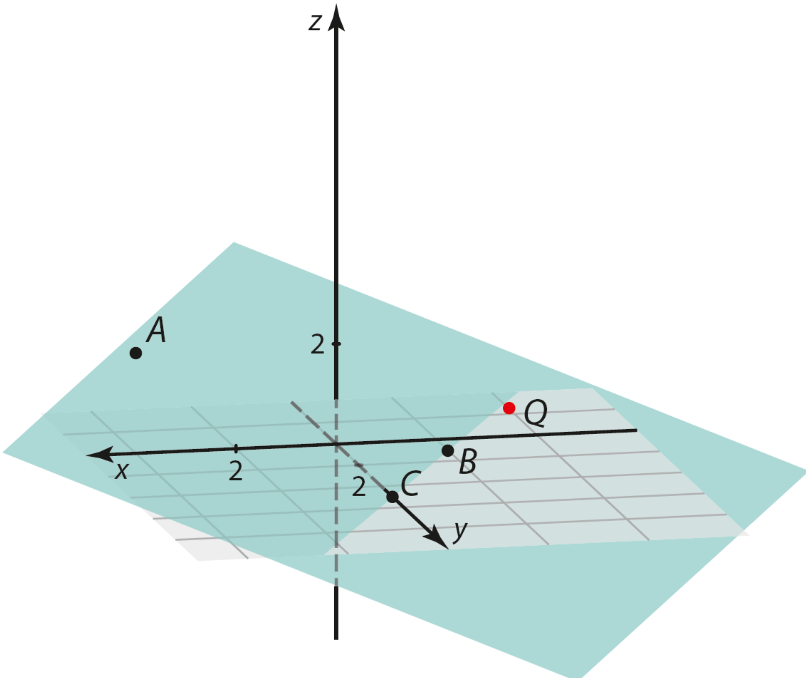
$$\sphericalangle(\overline{v}, \overline{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{62}}\right) = 75{,}28...° \approx 75°$$

a-kohdan tapaan voidaan päätellä, että suora leikkaa tason kulmassa $90° - 75° = 15°$.

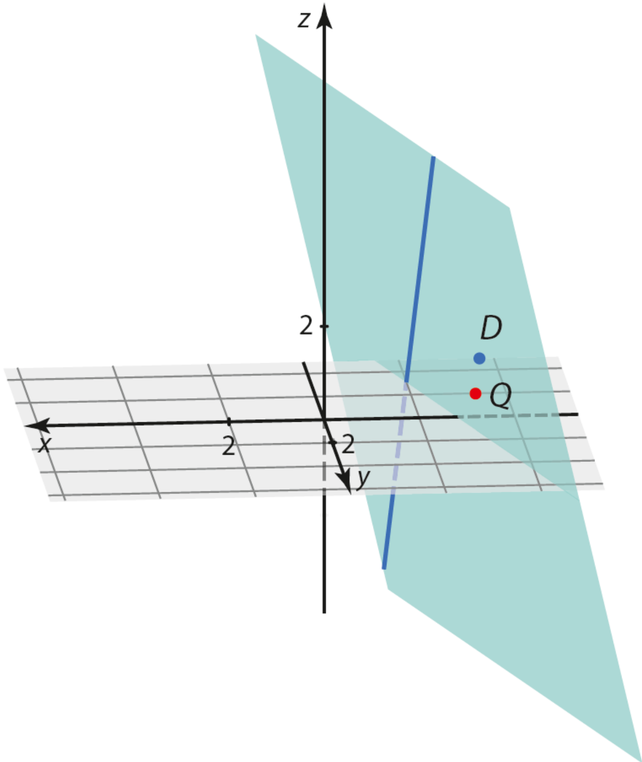
Vastaus a) 63° b) 15°

250

a) Kuvan perusteella piste $Q(-3,2,1)$ ei voi olla tasossa.



b) Kuvan perusteella piste $Q(-3,2,1)$ voi olla tasossa.



Vastaus a) ei voi
b) voi

251

a) Määritetään ensin tason suuntavektorit. Suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (2-2)\overline{i} + (-1-(-3))\overline{j} + (1-6)\overline{k}$$

$$= 0\overline{i} + 2\overline{j} - 5\overline{k} = 2\overline{j} - 5\overline{k}$$

$$\overline{AC} = (3-2)\overline{i} + (1-(-3))\overline{j} + (0-6)\overline{k}$$

$$= \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$$

Pisteen $A(2,-3,6)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$.
Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{AB} + t\overline{AC} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + s(2\overline{j} - 5\overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Voidaan valita esimerkiksi $s = 1$ ja $t = 1$ sekä $s = 1$ ja $t = -1$.

Kun $s = 1$ ja $t = 1$,

$$\overline{OP} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + 1\cdot(2\overline{j} - 5\overline{k}) + 1\cdot(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + 2\overline{j} - 5\overline{k} + \overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}.$$

Saadaan piste $(3,3,-5)$.

Kun $s = 1$ ja $t = -1$,

$$\overline{OP} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + 1 \cdot (2\overline{j} - 5\overline{k}) - 1 \cdot (\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k})$$

$$= 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + 2\overline{j} - 5\overline{k} - \overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$$

$$= \overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}.$$

Saadaan piste $(1, -5, 7)$.

Vastaus a) $\overline{OP} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} + s(2\overline{j} - 5\overline{k}) + t(\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k})$,
missä s ja t ovat reaalilukuja
b) esimerkiksi $(3, 3, -5)$ ja $(1, -5, 7)$

252

a) Pisteen $A(2,1,-1)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$. Pisteen A kautta kulkevan tason suuntavektorit ovat $\overline{u} = \overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$. Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{u} + t\overline{v} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k} + s(\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}) + t(-3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Määritetään ensin tason parametriesitys. Esitys on muotoa

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ ja $z_0 = -1$ sekä $u_x = 1$, $u_y = -5$ ja $u_z = 3$ sekä $v_x = -3$, $v_y = 4$ ja $v_z = -2$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 2 + s - 3t \\ y = 1 - 5s + 4t \\ z = -1 + 3s - 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja. (Parametriesitys voidaan myös lukea suoraan vektoriyhtälöstä.)

Sijoitetaan pisteen $Q(1,-5,3)$ koordinaatit $x=1$, $y=-5$ ja $z=3$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 1 = 2 + s - 3t \\ -5 = 1 - 5s + 4t \\ 3 = -1 + 3s - 2t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s=2$ ja $t=1$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $Q(1,-5,3)$ on tasossa. □

Vastaus a) $\overline{OP} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k} + s(\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}) + t(-3\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k})$, missä s ja t ovat reaalilukuja

253

a) Tason suuntavektoreiksi $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$. Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\overline{AB} = (8-6)\overline{i} + (-1-(-2))\overline{j} + (-3-1)\overline{k}$$

$$= 2\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k} \qquad (= \overline{u})$$

$$\overline{AC} = (2-6)\overline{i} + (1-(-2))\overline{j} + (2-1)\overline{k}$$

$$= -4\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k} \qquad (= \overline{v})$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = x_0 + u_x s + v_x t \\ y = y_0 + u_y s + v_y t \\ z = z_0 + u_z s + v_z t, \end{cases}$$

missä nyt esimerkiksi $x_0 = 6$, $y_0 = -2$ ja $z_0 = 1$ sekä $u_x = 2$, $u_y = 1$ ja $u_z = -4$ sekä $v_x = -4$, $v_y = 3$ ja $v_z = 1$. Saadaan siis

$$\begin{cases} x = 6 + 2s - 4t \\ y = -2 + s + 3t \\ z = 1 - 4s + t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Tason ja z-akselin leikkauspiste on muotoa $(0,0,z)$.
Määritetään parametrien s ja t arvot sijoittamalla parametriesityksen kahteen ensimmäiseen yhtälöön $x=0$ ja $y=0$ ja ratkaisemalla yhtälöpari laskimella.

$$\begin{cases} 0 = 6+2s-4t \\ 0 = -2+s+3t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s=-1$ ja $t=1$.

Lasketaan leikkauspisteen z-koordinaatti parametriesityksen viimeisen yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} z &= 1-4s+t \\ &= 1-4\cdot(-1)+1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0,0,6)$.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 6+2s-4t \\ y = -2+s+3t, \\ z = 1-4s+t \end{cases}$ missä s ja t ovat reaalilukuja

b) pisteessä $(0,0,6)$

254

a) Parametriesitystä varten tarvitaan pisteen $A(5,2,-1)$ lisäksi kaksi muuta tason pistettä B ja C. Määritetään annetulta suoralta kaksi pistettä sijoittamalla parametrille t kaksi arvoa, esimerkiksi arvot 0 ja 1.

Sijoitetaan $t=0$.

$$\begin{cases} x = 2 - t = 2 - 0 = 2 \\ y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ z = -1 + t = -1 + 0 = -1 \end{cases}$$

Saadaan piste $B(2,1,-1)$.

Sijoitetaan $t=1$.

$$\begin{cases} x = 2 - t = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\ z = -1 + t = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $C(1,3,0)$.

Muodostetaan tasolle kaksi suuntavektoria.

$$\overline{AB} = (2-5)\overline{i} + (1-2)\overline{j} + (-1-(-1))\overline{k}$$

$$= -3\overline{i} - \overline{j} + 0\overline{k} = -3\overline{i} - \overline{j}$$

$$\overline{AC} = (1-5)\overline{i} + (3-2)\overline{j} + (0-(-1))\overline{k}$$

$$= -4\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$$

Tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 5-3r-4s \\ y = 2-r+s \\ z = -1+s, \end{cases}$$

missä r ja s ovat reaalilukuja.

b) Sijoitetaan pisteen $P(-9,2,1)$ koordinaatit $x=-9$, $y=2$ ja $z=1$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} -9 = 5-3r-4s \\ 2 = 2-r+s \\ 1 = -1+s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r=2$ ja $s=2$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste $P(-9,2,1)$ on tasossa.

c) Sijoitetaan pisteen $Q(2,4,-1)$ koordinaatit $x=2$, $y=4$ ja $z=-1$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 2 = 5-3r-4s \\ 4 = 2-r+s \\ -1 = -1+s \end{cases}$$

Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten piste $Q(2,4,-1)$ ei ole tasossa.

Vastaus a) $\begin{cases} x = 5 - 3r - 4s \\ y = 2 - r + s, \\ z = -1 + s \end{cases}$ missä r ja s ovat reaalilukuja

b) on

c) ei ole

255

Määritetään ensin parametriesitys tasolle, joka kulkee pisteiden $A(-1,2,-2)$, $B(4,0,2)$ ja $C(3,-4,0)$ kautta.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$. Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\overline{AB} = (4-(-1))\overline{i} + (0-2)\overline{j} + (2-(-2))\overline{k}$$

$$= 5\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$$

$$\overline{AC} = (3-(-1))\overline{i} + (-4-2)\overline{j} + (0-(-2))\overline{k}$$

$$= 4\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}$$

Tason parametriesitys on esimerkiksi

$$\begin{cases} x = -1 + 5s + 4t \\ y = \ \ 2 - 2s - 6t \\ z = -2 + 4s + 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Tutkitaan seuraavaksi, sijaitseeko piste D tasossa. Sijoitetaan pisteen $D(2,3,1)$ koordinaatit $x=2$, $y=3$ ja $z=1$ yhtälöryhmään ja tutkitaan laskimella, onko yhtälöryhmällä ratkaisu.

$$\begin{cases} 2=-1+5s+4t \\ 3=\ 2-2s-6t \\ 1=-2+4s+2t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s=1$ ja $t=-\frac{1}{2}$. Koska yhtälöryhmälle saatiin ratkaisu, piste D on tasossa, joka kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Siten kaikki neljä pistettä ovat samassa tasossa.

Vastaus ovat

256

a) Muodostetaan vektorin $\overline{BA}$ lauseke.

$$\overline{BA} = (12-7)\overline{i} + (-15-(-3))\overline{j} + (4-(-3))\overline{k}$$

$$= 5\overline{i} - 12\overline{j} + 7\overline{k}$$

Koska taso on kohtisuorassa janaa AB vastaan, vektori $\overline{BA}$ voidaan valita tason normaalivektoriksi. (Voitaisiin valita myös vektori $\overline{AB}$. Valinta johtaa matemaattisesti identtiseen tulokseen.)

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0,$$

missä nyt tasossa sijaitsevan pisteen B koordinaatit $x_0 = 7$, $y_0 = -3$ ja $z_0 = -3$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = 5$, $b = -12$ ja $c = 7$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) &= 0 \\ 5\cdot(x-7) - 12\cdot(y-(-3)) + 7\cdot(z-(-3)) &= 0 \\ 5x - 35 - 12y - 36 + 7z + 21 &= 0 \\ 5x - 12y + 7z - 50 &= 0 \end{aligned}$$

b) Tason ja x-akselin leikkauspiste on muotoa $(x,0,0)$.
Määritetään leikkauspisteen x-koordinaatti sijoittamalla normaalimuotoiseen yhtälöön $y=0$ ja $z=0$ ja ratkaisemalla yhtälö.

$$5x-12y+7z-50=0$$

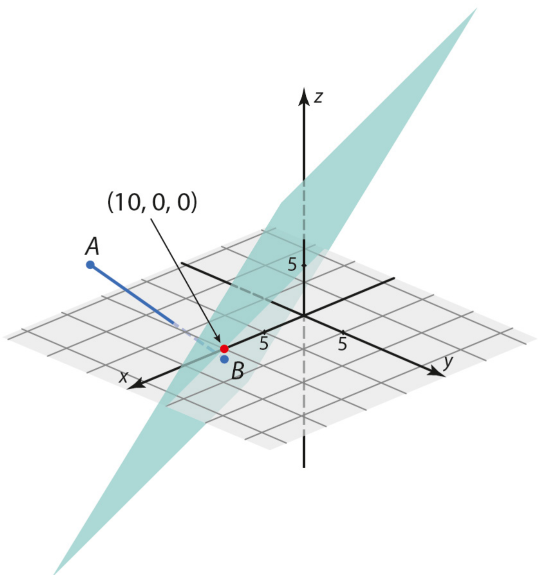
$$5x-12\cdot 0+7\cdot 0-50=0$$

$$5x-50=0$$

$$x=10$$

Leikkauspiste on $(10,0,0)$.

Tarkistus piirtämällä (leikkauspiste merkitty punaisella):



Vastaus a) $5x-12y+7z-50=0$
b) pisteessä $(10,0,0)$

257

Koska taso T ja taso $x-30y+12z-7=0$ ovat yhdensuuntaiset, myös niiden normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset.

Muuttujien kertoimista voidaan suoraan lukea, että yksi tason $x-30y+12z-7=0$ normaalivektori on $\overline{i}-30\overline{j}+12\overline{k}$. Kyseinen vektori voidaan valita myös tason T normaalivektoriksi.

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

missä nyt pisteen A koordinaatit $x_0=5$, $y_0=-17$ ja $z_0=3$ sekä normaalivektorin kertoimet $a=1$, $b=-30$ ja $c=12$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned}
a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)&=0\\
1\cdot(x-5)-30\cdot(y-(-17))+12\cdot(z-3)&=0\\
x-5-30y-510+12z-36&=0\\
x-30y+12z-551&=0
\end{aligned}$$

Tason T yhtälö on siis $x-30y+12z-551=0$.

Vastaus $\quad x-30y+12z-551=0$

258

Pisteestä $P(-1,9,-3)$ lähtevän lasersäteen suuntavektori on $\overline{v}=\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$, joten sädettä vastaavan suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x=-1+\ \ s \\ y=\ \ 9-2s \\ z=-3+\ \ s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Määritetään suoran ja tason $x-y+z-2=0$ leikkauspiste A.

Suoran ja tason leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat sekä suoran parametriesityksen että tason yhtälön. Sijoitetaan suoran parametriesityksestä koordinaattien lausekkeet $x=-1+s$, $y=9-2s$ ja $z=-3+s$ tason yhtälöön $x-y+z-2=0$.

$$\begin{aligned} (-1+s)-(9-2s)+(-3+s)-2&=0 \\ -1+s-9+2s-3+s-2&=0 \\ 4s-15&=0 \\ s&=\frac{15}{4} \end{aligned}$$

Koska parametrille s saadaan ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen A koordinaatit sijoittamalla arvo $s=\frac{15}{4}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=-1+s=-1+\frac{15}{4}=\frac{11}{4} \\ y=9-2s=9-2\cdot\frac{15}{4}=\frac{3}{2} \\ z=-3+s=-3+\frac{15}{4}=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Leikkauspiste on $A(\frac{11}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{4})$.

Määritetään sitten suoran ja tason $\begin{cases} x=\ \ 1+\ r+3t \\ y=\ \ 5-3r+3t \\ z=-1+\ r-6t \end{cases}$ leikkauspiste B.

Suoran ja tason leikkauspisteen (x,y,z) koordinaatit toteuttavat sekä tason että suoran parametriesityksen. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} -1+\ s=\ \ 1+\ r+3t \\ 9-2s=\ \ 5-3r+3t \\ -3+\ s=-1+\ r-6t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r=0$, $s=2$ ja $t=0$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen B koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla arvo $s = 2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -1 + s = -1 + 2 = 1 \\ y = 9 - 2s = 9 - 2 \cdot 2 = 5 \\ z = -3 + s = -3 + 2 = -1 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $B(1,5,-1)$.

On siis saatu selvitettyä molemmat leikkauspisteet $A(\frac{11}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{4})$ ja $B(1,5,-1)$.

Määritetään lopuksi vektori $\overline{AB}$ ja sen pituus.

$$\overline{AB} = (1 - \frac{11}{4})\overline{i} + (5 - \frac{3}{2})\overline{j} + (-1 - \frac{3}{4})\overline{k}$$

$$= -\frac{7}{4}\overline{i} + \frac{7}{2}\overline{j} - \frac{7}{4}\overline{k}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-\frac{7}{4})^2 + (\frac{7}{2})^2 + (-\frac{7}{4})^2} = \sqrt{\frac{147}{8}} = \frac{7\sqrt{6}}{4}$$

Vastaus $\frac{7\sqrt{6}}{4}$

259

a) Määritetään ensin lentokoneen lentosuora. Merkitään pistettä $(14,5;\ 14,5;\ 1)$ kirjaimella A ja pistettä $(12;\ 12;\ 0,8)$ kirjaimella B.

Muodostetaan pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\overline{AB} = (12-14,5)\overline{i} + (12-14,5)\overline{j} + (0,8-1)\overline{k}$$

$$= -2,5\overline{i} - 2,5\overline{j} - 0,2\overline{k}$$

Muodostetaan lentosuoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 14,5 - 2,5t \\ y = 14,5 - 2,5t \\ z = \ \ 1 \ \ \ - 0,2t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste, jossa lentokone koskettaa kiitorataa, on lentosuoran ja xy-tason leikkauspiste. Leikkauspisteen z-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(x, y, 0)$. Ratkaistaan parametri t.

$$z = 1 - 0,2t$$

$$0 = 1 - 0,2t$$

$$t = 5$$

Lasketaan leikkauspisteen x- ja y-koordinaatit.

$$x = 14,5 - 2,5t = 14,5 - 2,5 \cdot 5 = 2$$

$$y = 14,5 - 2,5t = 2$$

Lentokone koskettaa kiitorataa pisteessä $(2,2,0)$.

b) On laskettava lentosuoran ja xy-tason välinen kulma.

Lentosuoran suuntavektoriksi laskettiin jo a-kohdassa
$\overline{AB} = -2,5\overline{i} - 2,5\overline{j} - 0,2\overline{k}$.

xy-tason normaalivektoriksi voidaan valita $\overline{n} = \overline{k}$.

Lasketaan vektorien pituudet ja pistetulo.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2,5)^2 + (-2,5)^2 + (-0,2)^2} = \sqrt{12,54}$$

$$\left|\overline{n}\right| = 1$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{n} = (-2,5\overline{i} - 2,5\overline{j} - 0,2\overline{k}) \cdot \overline{k}$$

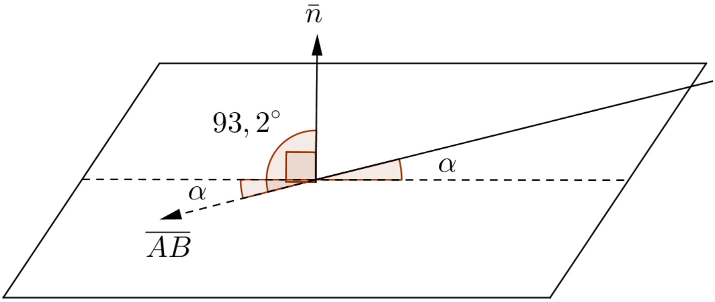
$$= -2,5 \cdot 0 - 2,5 \cdot 0 - 0,2 \cdot 1 = -0,2$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{AB}, \overline{n}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{n}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{n}\right|} = \frac{-0,2}{\sqrt{12,54} \cdot 1}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{n}) = \cos^{-1}(-\frac{0,2}{\sqrt{12,54}}) = 93,237...^\circ \approx 93,2^\circ$$

Suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma on tylppä. Kuvan perusteella lentosuoran ja tason välinen kulma $\alpha = 93,2° - 90° = 3,2°$.



(Kulmien ja vektorien pituuksien mittasuhteet ovat kuvassa väärin.)

Vastaus a) pisteessä $(2,2,0)$

b) $3,2°$

260

Jos halutaan muodostaa normaalimuotoinen yhtälö tasolle

$$\begin{cases} x = 1 - s + t & (1) \\ y = 3 - 2s + 4t & (2) \\ z = 4 + s + 3t & (3) \end{cases}$$

on päästävä eroon parametreista s ja t. Ratkaistaan ensin parametri t yhtälöstä 1.

$$x = 1 - s + t$$

$$x - 1 + s = t$$

$$t = x - 1 + s$$

Sijoitetaan saatu lauseke yhtälöihin 2 ja 3 ja sievennetään yhtälöparia.

$$\begin{cases} y = 3 - 2s + 4t = 3 - 2s + 4 \cdot (x - 1 + s) \\ z = 4 + s + 3t = 4 + s + 3 \cdot (x - 1 + s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2s + 4x - 4 + 4s = -1 + 2s + 4x \\ z = 4 + s + 3x - 3 + 3s = 1 + 4s + 3x \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöparin ylemmästä yhtälöstä parametri s.

$$y = -1 + 2s + 4x$$

$$y + 1 - 4x = 2s$$

$$2s = y + 1 - 4x = 1 - 4x + y$$

$$s = \frac{1}{2} - 2x + \frac{1}{2}y$$

Sijoitetaan saatu lauseke yhtälöparin alempaan yhtälöön ja sievennetään yhtälöä.

$$z = 1 + 4s + 3x$$

$$z = 1 + 4 \cdot (\frac{1}{2} - 2x + \frac{1}{2}y) + 3x$$

$$z = 1 + 2 - 8x + 2y + 3x$$

$$z = 3 - 5x + 2y$$

$$5x - 2y + z - 3 = 0$$

Huomataan, että on päädytty normaalimuotoiseen yhtälöön, jossa ei esiinny parametreja s ja t.

Vastaus $\quad 5x - 2y + z - 3 = 0$

261

Annettu suora on tason $3x+2y-4z+7=0$ suuntainen silloin, kun suoran suuntavektori on kohtisuorassa tason normaalivektoria vastaan. Suoran suuntavektorin ja tason normaalivektorin pistetulon pitää siis olla nolla.

Suoran $\begin{cases} x = 3a + 4t \\ y = -2 - at \\ z = 7 + 2at \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat luettavissa parametrin t kertoimista, joten (erääksi) suuntavektoriksi saadaan $\overline{v} = 4\overline{i} - a\overline{j} + 2a\overline{k}$.

Vastaavasti muuttujien kertoimista voidaan nähdä suoraan, että yksi tason $3x+2y-4z+7=0$ normaalivektori on $\overline{n} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$.

Nyt siis vektorien $\overline{v}$ ja $\overline{n}$ pistetulon täytyy olla nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion a arvo.

$$\overline{v} \cdot \overline{n} = 0$$

$$(4\overline{i} - a\overline{j} + 2a\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}) = 0$$

$$4 \cdot 3 - a \cdot 2 + 2a \cdot (-4) = 0$$

$$12 - 10a = 0$$

$$a = \frac{6}{5}$$

Annettu suora on tason $3x+2y-4z+7=0$ suuntainen vakion arvolla $a = \frac{6}{5}$.

Vastaus $\quad a = \frac{6}{5}$

262

a) Muuttujien kertoimista nähdään suoraan, että yksi tason $-2x+y-z+3=0$ normaalivektori on $\overline{n}=-2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$.

Vastaavasti tason $x+2y+3z-8=0$ yksi normaalivektori on $\overline{p}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$.

Lasketaan normaalivektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{n}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$
$$|\overline{p}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$
$$\overline{n}\cdot\overline{p}=(-2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})\cdot(\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k})$$
$$=-2\cdot 1+1\cdot 2-1\cdot 3=-3$$

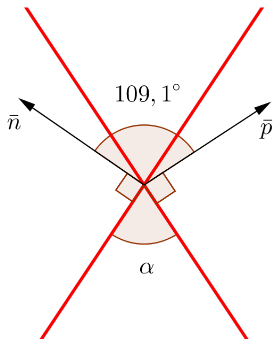
Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{n},\overline{p})=\frac{\overline{n}\cdot\overline{p}}{|\overline{n}||\overline{p}|}=\frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\sphericalangle(\overline{n},\overline{p})=\cos^{-1}(-\frac{3}{2\sqrt{21}})=109{,}106...^\circ\approx 109{,}1^\circ$$

Normaalivektorien välinen kulma on tylppä. Kysytty tasojen välinen kulma on kuvan perusteella

$$\alpha=360^\circ-109{,}1^\circ-90^\circ-90^\circ=70{,}9^\circ.$$



(Kuva havainnollistaa kulmia, mutta vektorien pituudet ovat kuvassa väärin. Tasoja on merkitty punaisilla viivoilla.)

b) Muuttujien kertoimista nähdään, että yksi tason $x-2y+4z+3=0$ normaalivektori on $\overline{n}=\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$.

Vastaavasti tason $7x-2y-4z-35=0$ yksi normaalivektori on $\overline{p}=7\overline{i}-2\overline{j}-4\overline{k}$.

Lasketaan normaalivektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{n}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$|\overline{p}|=\sqrt{7^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{69}$$

$$\overline{n}\cdot\overline{p}=(\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k})\cdot(7\overline{i}-2\overline{j}-4\overline{k})$$
$$=1\cdot 7-2\cdot(-2)+4\cdot(-4)=-5$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{n},\overline{p})=\frac{\overline{n}\cdot\overline{p}}{|\overline{n}||\overline{p}|}=\frac{-5}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{69}}=-\frac{5}{3\sqrt{161}}$$

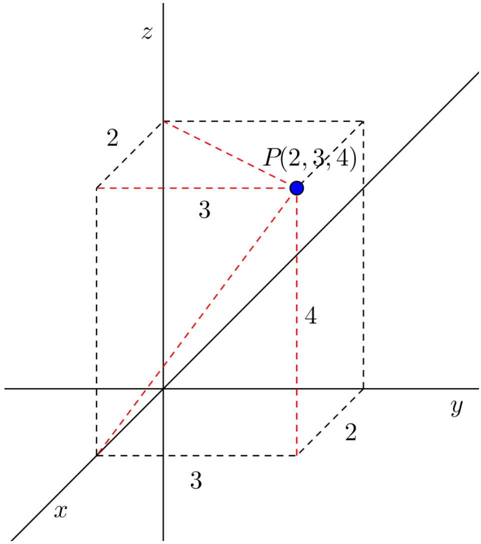
$$\sphericalangle(\overline{n},\overline{p})=\cos^{-1}(-\frac{5}{3\sqrt{161}})=97{,}547...^\circ\approx 97{,}5^\circ$$

Koska saatu normaalivektorien välinen kulma on tylppä, a-kohdan tapaan voidaan päätellä, että kysytty tasojen välinen kulma on

$$360^\circ-97{,}5^\circ-90^\circ-90^\circ=82{,}5^\circ.$$

Vastaus a) $70{,}9^\circ$ b) $82{,}5^\circ$

263



a) Kuvan perusteella pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys xy-tasosta on 4 (z-koordinaatin arvo).

b) Pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys xz-tasosta on 3 (y-koordinaatin arvo).

c) Pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys x-akselista saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

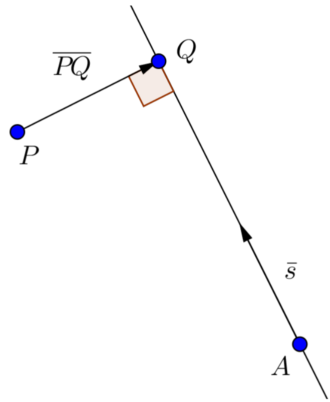
$$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

d) Pisteen $P(2,3,4)$ etäisyys z-akselista saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

Vastaus
a) 4
b) 3
c) 5
d) $\sqrt{13}$

264



Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Suoran suuntavektori on $\overline{s} = 4\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ ja suora kulkee pisteen $A(8,0,1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = \quad -t \\ z = 1 + 2t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (8 + 4t, -t, 1 + 2t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (8 + 4t - (-1))\overline{i} + (-t - 4)\overline{j} + (1 + 2t - 0)\overline{k} \\ &= (9 + 4t)\overline{i} + (-4 - t)\overline{j} + (1 + 2t)\overline{k} \end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{s}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}\cdot\overline{s} &= 0 \\
((9+4t)\overline{i}+(-4-t)\overline{j}+(1+2t)\overline{k})\cdot(4\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}) &= 0 \\
(9+4t)\cdot 4+(-4-t)\cdot(-1)+(1+2t)\cdot 2 &= 0 \\
21t+42 &= 0 \\
t &= -2
\end{aligned}$$

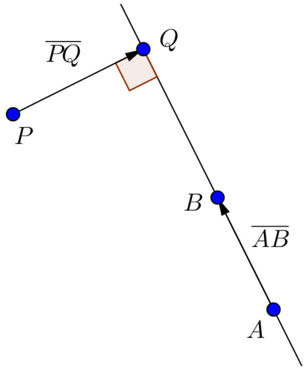
Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=-2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases}
x = 8+4t = 8+4\cdot(-2) = 0 \\
y = -t = -(-2) = 2 \\
z = 1+2t = 1+2\cdot(-2) = -3
\end{cases}$$

Siten piste $(0,2,-3)$ on suoran pisteistä lähimpänä pistettä P.

Vastaus $(0,2,-3)$

265



a) Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (6-(-2))\overline{i} + (-1-3)\overline{j} + (4-(-2))\overline{k}$$

$$= 8\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}$$

Suora kulkee pisteen $A(-2,3,-2)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -2+8t \\ y = 3-4t \\ z = -2+6t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-2+8t, 3-4t, -2+6t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\overline{PQ} = (-2+8t-4)\overline{i} + (3-4t-2)\overline{j} + (-2+6t-(-1))\overline{k}$$
$$= (-6+8t)\overline{i} + (1-4t)\overline{j} + (-1+6t)\overline{k}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{AB}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0$$
$$((-6+8t)\overline{i} + (1-4t)\overline{j} + (-1+6t)\overline{k}) \cdot (8\overline{i} - 4\overline{j} + 6\overline{k}) = 0$$
$$(-6+8t) \cdot 8 + (1-4t) \cdot (-4) + (-1+6t) \cdot 6 = 0$$
$$116t - 58 = 0$$
$$t = \frac{1}{2}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{1}{2}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -2+8t = -2+8 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ y = 3-4t = 3-4 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ z = -2+6t = -2+6 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(2,1,1)$.

b) Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (2-4)\overline{i} + (1-2)\overline{j} + (1-(-1))\overline{k}$$

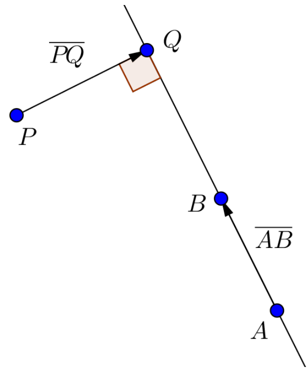
$$= -2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Pisteen P etäisyys suorasta AB on 3.

Vastaus a) $(2,1,1)$
b) 3

266



Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (-3-12)\overline{i} + (5-(-5))\overline{j} + (-4-6)\overline{k}$$

$$= -15\overline{i} + 10\overline{j} - 10\overline{k}$$

Suora kulkee pisteen $A(12,-5,6)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 12 - 15t \\ y = -5 + 10t \\ z = 6 - 10t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (12-15t, -5+10t, 6-10t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (12-15t-1)\overline{i} + (-5+10t-0)\overline{j} + (6-10t-2)\overline{k} \\ &= (11-15t)\overline{i} + (-5+10t)\overline{j} + (4-10t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{AB}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$((11-15t)\overline{i} + (-5+10t)\overline{j} + (4-10t)\overline{k}) \cdot (-15\overline{i} + 10\overline{j} - 10\overline{k}) = 0$$

$$(11-15t)\cdot(-15) + (-5+10t)\cdot 10 + (4-10t)\cdot(-10) = 0$$

$$425t - 255 = 0$$

$$t = \frac{3}{5}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{3}{5}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 12 - 15t = 12 - 15 \cdot \dfrac{3}{5} = 3 \\ y = -5 + 10t = -5 + 10 \cdot \dfrac{3}{5} = 1 \\ z = 6 - 10t = 6 - 10 \cdot \dfrac{3}{5} = 0 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(3,1,0)$.

Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (3-1)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (0-2)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}\end{aligned}$$

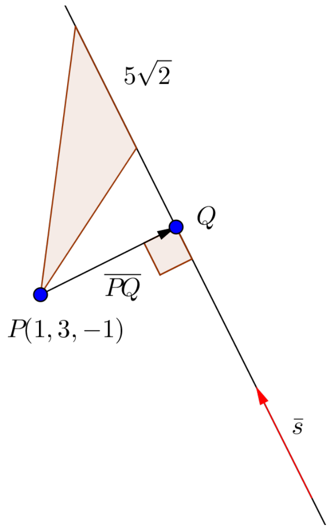
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Pisteen P etäisyys suorasta AB on 3.

Vastaus 3

267

Merkitään kolmion huippua eli pistettä $(1,3,-1)$ kirjaimella P.



Kolmion pinta-ala on puolet kannan pituuden ja korkeuden tulosta. Koska kannan pituus tunnetaan, on selvitettävä korkeus eli pisteen P etäisyys annetusta suorasta.

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku. Esityksestä nähdään, että yksi suoran suuntavektori on $\overline{s} = -\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (2-t, 3-t, 1-t)\,.$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (2-t-1)\overline{i}+(3-t-3)\overline{j}+(1-t-(-1))\overline{k}\\ &= (1-t)\overline{i}-t\overline{j}+(2-t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{s}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}\cdot\overline{s} &= 0\\ ((1-t)\overline{i}-t\overline{j}+(2-t)\overline{k})\cdot(-\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}) &= 0\\ (1-t)\cdot(-1)-t\cdot(-1)+(2-t)\cdot(-1) &= 0\\ 3t-3 &= 0\\ t &= 1\end{aligned}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=1$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases}x = 2-t = 2-1 = 1\\ y = 3-t = 3-1 = 2\\ z = 1-t = 1-1 = 0\end{cases}$$

Siten piste $Q(1,2,0)$ on suoran pisteistä lähimpänä kolmion huippua P.

Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (1-1)\overline{i} + (2-3)\overline{j} + (0-(-1))\overline{k}$$
$$= 0\overline{i} - \overline{j} + \overline{k} = -\overline{j} + \overline{k}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Pisteen P etäisyys suorasta on $\sqrt{2}$. Kyseessä on siis myös tutkittavan kolmion korkeus.

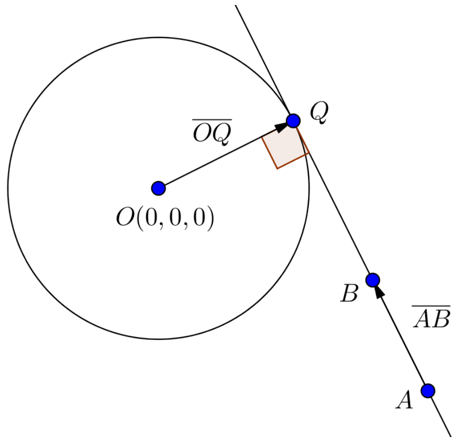
Lasketaan lopuksi kolmion pinta-ala kolmion kannan pituuden ja korkeuden tulon puolikkaana:

$$A = \frac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5.$$

Vastaus 5

268

Merkitään suoran pisteitä $(-7,7,0)$ ja $(5,1,3)$ kirjaimilla A ja B. Ympyrän keskipiste on origossa $O(0,0,0)$.



On määritettävä ympyrän säde eli origon O etäisyys suorasta AB.

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä O. Tällöin vektori $\overline{OQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-(-7))\overline{i} + (1-7)\overline{j} + (3-0)\overline{k} \\ &= 12\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}\end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen $A(-7,7,0)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -7 + 12t \\ y = \quad 7 - \ 6t \\ z = \qquad\quad 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-7+12t, 7-6t, 3t).$$

Vektori $\overline{OQ}$ on pisteen Q paikkavektori, joten

$$\overline{OQ} = (-7+12t)\overline{i} + (7-6t)\overline{j} + 3t\overline{k}.$$

Koska vektori $\overline{OQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{AB}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{OQ} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$((-7+12t)\overline{i} + (7-6t)\overline{j} + 3t\overline{k}) \cdot (12\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}) = 0$$

$$(-7+12t) \cdot 12 + (7-6t) \cdot (-6) + 3t \cdot 3 = 0$$

$$189t - 126 = 0$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = \frac{2}{3}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -7 + 12t = -7 + 12 \cdot \frac{2}{3} = 1 \\ y = 7 - 6t = 7 - 6 \cdot \frac{2}{3} = 3 \\ z = 3t = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(1,3,2)$.

Ympyrän säde on origon etäisyys suorasta AB eli origon ja pisteen Q välinen etäisyys. Vektori $\overline{OQ}$ on paikkavektorina $\overline{OQ} = \overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$. Lasketaan sen pituus.

$$\left|\overline{OQ}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Siis ympyrän säde on $\sqrt{14}$.

Vastaus $\sqrt{14}$

269

Merkitään pistettä $(4,3,-5)$ kirjaimella A.

Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Taso sisältää pisteen $A(4,3,-5)$ ja sillä on suuntavektorit $\overline{u}=-2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$ ja $\overline{v}=\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 4-2s+t \\ y = 3-s+2t \\ z = -5+s-3t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q=(4-2s+t,3-s+2t,-5+s-3t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (4-2s+t-3)\overline{i}+(3-s+2t-(-13))\overline{j}+(-5+s-3t-(-2))\overline{k} \\ &= (1-2s+t)\overline{i}+(16-s+2t)\overline{j}+(-3+s-3t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{u} = -2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{PQ} \cdot \overline{u} = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \overline{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((1-2s+t)\overline{i} + (16-s+2t)\overline{j} + (-3+s-3t)\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = 0 \\ ((1-2s+t)\overline{i} + (16-s+2t)\overline{j} + (-3+s-3t)\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2s+t)\cdot(-2) + (16-s+2t)\cdot(-1) + (-3+s-3t)\cdot 1 = 0 \\ (1-2s+t)\cdot 1 + (16-s+2t)\cdot 2 + (-3+s-3t)\cdot(-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6s - 7t - 21 = 0 \\ -7s + 14t + 42 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = 0$ ja $t = -3$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = 0$ ja $t = -3$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 4 - 2s + t = 4 - 2 \cdot 0 - 3 = 1 \\ y = 3 - s + 2t = 3 - 0 + 2 \cdot (-3) = -3 \\ z = -5 + s - 3t = -5 + 0 - 3 \cdot (-3) = 4 \end{cases}$$

Saadaan piste $(1, -3, 4)$.

Vastaus $(1, -3, 4)$

270

a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (2-1)\overline{i} + (-1-0)\overline{j} + (0-(-1))\overline{k}$$

$$= \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$$

$$\overline{AC} = (2-1)\overline{i} + (2-0)\overline{j} + (2-(-1))\overline{k}$$

$$= i + 2\overline{j} + 3\overline{k}$$

Taso sisältää pisteen $A(1,0,-1)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + s + \ t \\ y = \quad\ -s + 2t \\ z = -1 + s + 3t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (1+s+t, -s+2t, -1+s+3t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\overline{PQ} = (1+s+t-8)\overline{i} + (-s+2t-\frac{3}{2})\overline{j} + (-1+s+3t-(-1))\overline{k}$$

$$= (-7+s+t)\overline{i} + (-\frac{3}{2}-s+2t)\overline{j} + (s+3t)\overline{k}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{AB} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{AC} = i + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-7+s+t)\overline{i} + (-\frac{3}{2}-s+2t)\overline{j} + (s+3t)\overline{k}) \cdot (\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = 0 \\ ((-7+s+t)\overline{i} + (-\frac{3}{2}-s+2t)\overline{j} + (s+3t)\overline{k}) \cdot (i + 2\overline{j} + 3\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-7+s+t)\cdot 1 + (-\frac{3}{2}-s+2t)\cdot(-1) + (s+3t)\cdot 1 = 0 \\ (-7+s+t)\cdot 1 + (-\frac{3}{2}-s+2t)\cdot 2 + (s+3t)\cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3s + 2t - \frac{11}{2} = 0 \\ 2s + 14t - 10 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s=\frac{3}{2}$ ja $t=\frac{1}{2}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s=\frac{3}{2}$ ja $t=\frac{1}{2}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=1+s+t=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=3 \\ y=-s+2t=-\frac{3}{2}+2\cdot(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2} \\ z=-1+s+3t=-1+\frac{3}{2}+3\cdot(\frac{1}{2})=2 \end{cases}$$

Saadaan piste $(3,-\frac{1}{2},2)$.

b) Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ}=(3-8)\overline{i}+(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2})\overline{j}+(2-(-1))\overline{k}$$

$$=-5\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$$

$$\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{38}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $\sqrt{38}$.

Vastaus a) $(3,-\frac{1}{2},2)$ b) $\sqrt{38}$

271

a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $x+y+z-2=0$ yksi normaalivektori on $\overline{n}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(2,-2,-1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2+t \\ z = -1+t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $x+y+z-2=0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned} (2+t)+(-2+t)+(-1+t)-2 &= 0 \\ 3t-3 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = 1$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2 + t = 2 + 1 = 3 \\ y = -2 + t = -2 + 1 = -1 \\ z = -1 + t = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Pisteeksi Q saadaan $(3, -1, 0)$.

b) Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (3-2)\overline{i} + (-1-(-2))\overline{j} + (0-(-1))\overline{k} \\ &= \overline{i} + \overline{j} + \overline{k} \end{aligned}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $\sqrt{3}$.

Vastaus a) $(3, -1, 0)$
b) $\sqrt{3}$

272

Merkitään kartion huippua eli pistettä $(2,-1,3)$ kirjaimella P.

Kartion tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulosta. Koska pohjan pinta-ala tunnetaan, on selvitettävä kartion korkeus eli pisteen P etäisyys annetusta tasosta.

Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $x-y+3z+10=0$ yksi normaalivektori on $\overline{n}=\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(2,-1,3)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 3+3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $x-y+3z+10=0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$(2+t)-(-1-t)+3\cdot(3+3t)+10=0$$

$$11t+22=0$$

$$t=-2$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=-2$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2+t = 2-2 = 0 \\ y = -1-t = -1-(-2) = 1 \\ z = 3+3t = 3+3\cdot(-2) = -3 \end{cases}$$

Siten piste $Q(0,1,-3)$ on tason pisteistä lähimpänä kartion huippua P.

Huipun P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (0-2)\overline{i} + (1-(-1))\overline{j} + (-3-3)\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k} \end{aligned}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

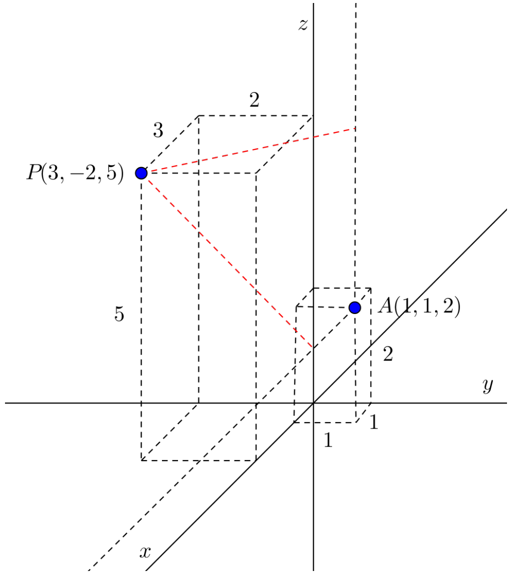
Pisteen P etäisyys tasosta on $2\sqrt{11}$. Kyseessä on siis myös tutkittavan kartion korkeus.

Lasketaan lopuksi kartion tilavuus jakamalla pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulo luvulla 3:

$$V = \frac{6\sqrt{11}\cdot 2\sqrt{11}}{3} = 44 .$$

Vastaus 44

273



a) Pisteen $P(3,-2,5)$ etäisyys pisteen $A(1,1,2)$ kautta kulkevasta xy-tason suuntaisesta tasosta on $5-2=3$ (z-koordinaattien erotus).

b) Pisteen $P(3,-2,5)$ etäisyys pisteen $A(1,1,2)$ kautta kulkevasta yz-tason suuntaisesta tasosta on $3-1=2$ (x-koordinaattien erotus).

c) Pisteen $P(3,-2,5)$ etäisyys pisteen $A(1,1,2)$ kautta kulkevasta x-akselin suuntaisesta suorasta saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

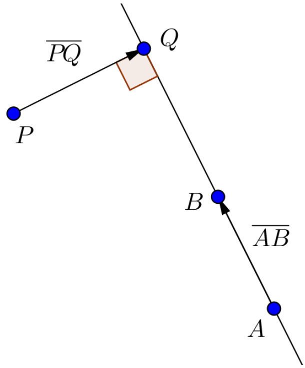
$$\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

d) Pisteen $P(3,-2,5)$ etäisyys pisteen $A(1,1,2)$ kautta kulkevasta z-akselin suuntaisesta suorasta saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

Vastaus a) 3 b) 2 c) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{13}$

274



Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (-1-1)\overline{i} + (-7-(-4))\overline{j} + (2-3)\overline{k}$$

$$= -2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}$$

Suora kulkee pisteen $A(1,-4,3)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \quad 1-2t \\ y = -4-3t \\ z = \quad 3-\ t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (1-2t, -4-3t, 3-t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\overline{PQ} = (1-2t-(-1))\overline{i} + (-4-3t-2)\overline{j} + (3-t-3)\overline{k}$$
$$= (2-2t)\overline{i} + (-6-3t)\overline{j} - t\overline{k}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{AB}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0$$
$$((2-2t)\overline{i} + (-6-3t)\overline{j} - t\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) = 0$$
$$(2-2t)\cdot(-2) + (-6-3t)\cdot(-3) - t\cdot(-1) = 0$$
$$14t + 14 = 0$$
$$t = -1$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -1$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 1-2t = 1-2\cdot(-1) = 3 \\ y = -4-3t = -4-3\cdot(-1) = -1 \\ z = 3-t = 3-(-1) = 4 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(3,-1,4)$.

Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (3-(-1))\overline{i} + (-1-2)\overline{j} + (4-3)\overline{k} \\ &= 4\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

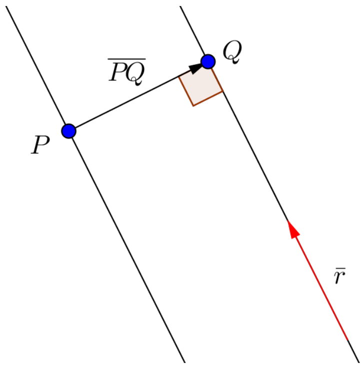
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

Pisteen P etäisyys suorasta AB on $\sqrt{26}$.

Vastaus $\sqrt{26}$

275

On laskettava kahden annetun suoran välinen etäisyys. Määritetään ensin esimerkiksi ensimmäiseltä suoralta jokin piste ja lasketaan sen etäisyys jälkimmäisestä suorasta.



Suoralla $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ on esimerkiksi piste $(1,2,1)$, joka saadaan, kun esitykseen sijoitetaan parametrin arvo $t = 0$. Merkitään tätä pistettä kirjaimella P.

Olkoon Q se jälkimmäisen suoran $\begin{cases} x = -2 - 2s \\ y = 1 - 3s \\ z = -4 - s \end{cases}$ piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Jälkimmäisen suoran parametriesityksestä nähdään, että yksi suoran suuntavektori on $\overline{r} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-2 - 2s, 1 - 3s, -4 - s).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ} &= (-2-2s-1)\overline{i} + (1-3s-2)\overline{j} + (-4-s-1)\overline{k} \\
&= (-3-2s)\overline{i} + (-1-3s)\overline{j} + (-5-s)\overline{k}
\end{aligned}
$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{r}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin s arvo.

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ} \cdot \overline{r} &= 0 \\
((-3-2s)\overline{i} + (-1-3s)\overline{j} + (-5-s)\overline{k}) \cdot (2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}) &= 0 \\
(-3-2s)\cdot 2 + (-1-3s)\cdot 3 + (-5-s)\cdot 1 &= 0 \\
-14s - 14 &= 0 \\
s &= -1
\end{aligned}
$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $s=-1$ suoran parametriesitykseen.

$$
\begin{cases}
x = -2-2s = -2-2\cdot(-1) = 0 \\
y = 1-3s = 1-3\cdot(-1) = 4 \\
z = -4-s = -4-(-1) = -3
\end{cases}
$$

Siten piste $Q(0,4,-3)$ on jälkimmäisen suoran pisteistä lähimpänä ensimmäisen suoran pistettä P.

Suorien välinen etäisyys on sama kuin pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (0-1)\overline{i} + (4-2)\overline{j} + (-3-1)\overline{k}$$
$$= -\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$

Siis suorien välinen etäisyys on $\sqrt{21}$.

Vastaus $\sqrt{21}$

276

a) On laskettava pisteen $P(1700,1450,0)$ etäisyys annetusta lentosuorasta.

Olkoon Q se lentosuoran $\begin{cases} x = 100 + 50t \\ y = 50 + 2t \\ z = 16t \end{cases}$ piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan.

Suoran parametriesityksestä nähdään, että yksi suoran suuntavektori on $\overline{s} = 50\overline{i} + 2\overline{j} + 16\overline{k}$.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$Q = (100 + 50t, 50 + 2t, 16t)$.

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (100 + 50t - 1700)\overline{i} + (50 + 2t - 1450)\overline{j} + (16t - 0)\overline{k} \\ &= (-1600 + 50t)\overline{i} + (-1400 + 2t)\overline{j} + 16t\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{s}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\overline{PQ}\cdot\overline{s}=0$$

$$((-1600+50t)\overline{i}+(-1400+2t)\overline{j}+16t\overline{k})\cdot(50\overline{i}+2\overline{j}+16\overline{k})=0$$

$$(-1600+50t)\cdot 50+(-1400+2t)\cdot 2+16t\cdot 16=0$$

$$2760t-82\ 800=0$$

$$t=30$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=30$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=100+50t=100+50\cdot 30=1600 \\ y=50+2t=50+2\cdot 30=110 \\ z=16t=16\cdot 30=480 \end{cases}$$

Siten piste $Q(1600,110,480)$ on lentosuoran pisteistä lähimpänä pistettä P.

Pisteen P etäisyys lentosuorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=(1600-1700)\overline{i}+(110-1450)\overline{j}+(480-0)\overline{k}\\ &=-100\overline{i}-1340\overline{j}+480\overline{k}\end{aligned}$$

$$\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{(-100)^2+(-1340)^2+480^2}=\sqrt{2036000}=20\sqrt{5090}\approx 1400$$

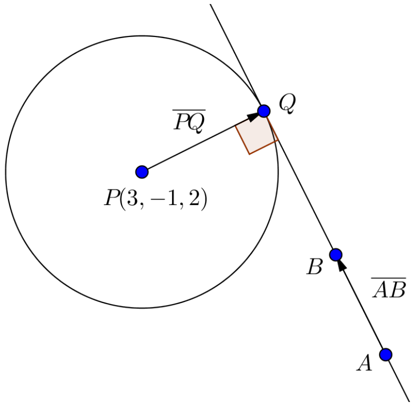
Siis lentokone lensi 1,4 km päästä Aavasta.

b) Lentokone oli lähimmillään Aavaa pisteessä $(1600, 110, 480)$.
Lentokone oli tuolloin 480 metrin korkeudella (z-koordinaatin arvo).

Vastaus a) 1,4 km päästä Aavasta
b) 480 m korkeudella

277

Merkitään suoran pisteitä $(-7,-2,6)$ ja $(3,8,-9)$ kirjaimilla A ja B ja ympyrän keskipistettä kirjaimella P.



Lasketaan ensin ympyrän säde eli keskipisteen P etäisyys suorasta AB.

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä P.
Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (3-(-7))\overline{i} + (8-(-2))\overline{j} + (-9-6)\overline{k}$$

$$= 10\overline{i} + 10\overline{j} - 15\overline{k}$$

Suora kulkee pisteen $A(-7,-2,6)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -7 + 10t \\ y = -2 + 10t \\ z = \ \ 6 - 15t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla AB, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-7 + 10t, -2 + 10t, 6 - 15t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-7 + 10t - 3)\overline{i} + (-2 + 10t - (-1))\overline{j} + (6 - 15t - 2)\overline{k} \\ &= (-10 + 10t)\overline{i} + (-1 + 10t)\overline{j} + (4 - 15t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{AB}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ ((-10 + 10t)\overline{i} + (-1 + 10t)\overline{j} + (4 - 15t)\overline{k}) \cdot (10\overline{i} + 10\overline{j} - 15\overline{k}) &= 0 \\ (-10 + 10t) \cdot 10 + (-1 + 10t) \cdot 10 + (4 - 15t) \cdot (-15) &= 0 \\ 425t - 170 &= 0 \\ t &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=\frac{2}{5}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=-7+10t=-7+10\cdot\frac{2}{5}=-3 \\ y=-2+10t=-2+10\cdot\frac{2}{5}=2 \\ z=6-15t=6-15\cdot\frac{2}{5}=0 \end{cases}$$

Saadaan piste $Q(-3,2,0)$.

Ympyrän säde on keskipisteen P etäisyys suorasta AB eli pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (-3-3)\overline{i}+(2-(-1))\overline{j}+(0-2)\overline{k} \\ &= -6\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k}\end{aligned}$$

$$\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$$

Siten ympyrän säde on 7 ja ympyrän kehän pituus

$$2\pi r=2\pi\cdot 7=14\pi .$$

Vastaus $\quad 14\pi$

278

a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (-2-2)\overline{i} + (-2-(-1))\overline{j} + (2-4)\overline{k}$$

$$= -4\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\overline{AC} = (4-2)\overline{i} + (2-(-1))\overline{j} + (6-4)\overline{k}$$

$$= 2i + 3\overline{j} + 2\overline{k}$$

Taso sisältää pisteen $A(2,-1,4)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 2 - 4s + 2t \\ y = -1 - s + 3t \\ z = 4 - 2s + 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (2-4s+2t, -1-s+3t, 4-2s+2t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\overline{PQ} = (2-4s+2t-3)\overline{i} + (-1-s+3t-2)\overline{j} + (4-2s+2t-(-1))\overline{k}$$
$$= (-1-4s+2t)\overline{i} + (-3-s+3t)\overline{j} + (5-2s+2t)\overline{k}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{AB} = -4\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$ ja $\overline{AC} = 2i + 3\overline{j} + 2\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{PQ} \cdot \overline{AB} = 0 \\ \overline{PQ} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-1-4s+2t)\overline{i} + (-3-s+3t)\overline{j} + (5-2s+2t)\overline{k}) \cdot (-4\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}) = 0 \\ ((-1-4s+2t)\overline{i} + (-3-s+3t)\overline{j} + (5-2s+2t)\overline{k}) \cdot (2i + 3\overline{j} + 2\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1-4s+2t)\cdot(-4) + (-3-s+3t)\cdot(-1) + (5-2s+2t)\cdot(-2) = 0 \\ (-1-4s+2t)\cdot 2 + (-3-s+3t)\cdot 3 + (5-2s+2t)\cdot 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21s - 15t - 3 = 0 \\ -15s + 17t - 1 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \dfrac{1}{2}$ ja $t = \dfrac{1}{2}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s=\frac{1}{2}$ ja $t=\frac{1}{2}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2-4s+2t = 2-4\cdot(\frac{1}{2})+2\cdot(\frac{1}{2}) = 1 \\ y = -1-s+3t = -1-\frac{1}{2}+3\cdot(\frac{1}{2}) = 0 \\ z = 4-2s+2t = 4-2\cdot(\frac{2}{2})+2\cdot(\frac{1}{2}) = 4 \end{cases}$$

Saadaan piste $(1,0,4)$.

Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (1-3)\overline{i} + (0-2)\overline{j} + (4-(-1))\overline{k} \\ &= -2\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k} \end{aligned}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+5^2} = \sqrt{33}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $\sqrt{33}$.

b) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $2x - y + z + 1 = 0$ yksi normaalivektori on $\overline{n} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(3,2,-1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $2x - y + z + 1 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$2 \cdot (3 + 2t) - (2 - t) + (-1 + t) + 1 = 0$$

$$6t + 4 = 0$$

$$t = -\frac{2}{3}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -\frac{2}{3}$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 3 + 2t = 3 + 2 \cdot (-\frac{2}{3}) = \frac{5}{3} \\ y = 2 - t = 2 - (-\frac{2}{3}) = \frac{8}{3} \\ z = -1 + t = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Pisteeksi Q saadaan $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{5}{3})$.

Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (\frac{5}{3} - 3)\overline{i} + (\frac{8}{3} - 2)\overline{j} + (-\frac{5}{3} - (-1))\overline{k}$$

$$= -\frac{4}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}$$

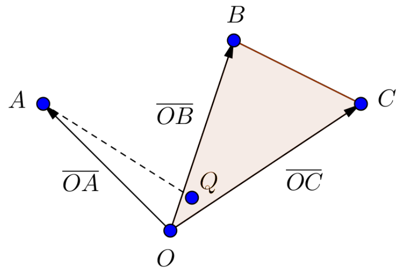
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-\frac{4}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vastaus a) $\sqrt{33}$ b) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

279

Pisteen A paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$, joten piste A on $(3, -2, -1)$. On laskettava pisteen A etäisyys pisteiden O (origo), B ja C määräämästä tasosta OBC.



Olkoon Q se tason OBC piste, joka on lähimpänä pistettä A.
Tällöin vektori $\overline{AQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{OB} = \overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{OC} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$.

Taso sisältää pisteen $O(0,0,0)$ ja sillä on edellä mainitut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 3s + t \\ z = 4s - 2t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (s + 2t, 3s + t, 4s - 2t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{AQ}$ lauseke.

$$\overline{AQ} = (s+2t-3)\overline{i} + (3s+t-(-2))\overline{j} + (4s-2t-(-1))\overline{k}$$
$$= (s+2t-3)\overline{i} + (3s+t+2)\overline{j} + (4s-2t+1)\overline{k}$$

Koska vektori $\overline{AQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{OB} = \overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{OC} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{AQ} \cdot \overline{OB} = 0 \\ \overline{AQ} \cdot \overline{OC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((s+2t-3)\overline{i} + (3s+t+2)\overline{j} + (4s-2t+1)\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}) = 0 \\ ((s+2t-3)\overline{i} + (3s+t+2)\overline{j} + (4s-2t+1)\overline{k}) \cdot (2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+2t-3)\cdot 1 + (3s+t+2)\cdot 3 + (4s-2t+1)\cdot 4 = 0 \\ (s+2t-3)\cdot 2 + (3s+t+2)\cdot 1 + (4s-2t+1)\cdot(-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26s - 3t + 7 = 0 \\ -3s + 9t - 6 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -\dfrac{1}{5}$ ja $t = \dfrac{3}{5}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s=-\frac{1}{5}$ ja $t=\frac{3}{5}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = s + 2t = -\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{3}{5} = 1 \\ y = 3s + t = 3\cdot(-\frac{1}{5}) + \frac{3}{5} = 0 \\ z = 4s - 2t = 4\cdot(-\frac{1}{5}) - 2\cdot\frac{3}{5} = -2 \end{cases}$$

Saadaan piste $(1,0,-2)$.

Pisteen A etäisyys tasosta OBC on pisteiden A ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{AQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= (1-3)\overline{i} + (0-(-2))\overline{j} + (-2-(-1))\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}\end{aligned}$$

$$\left|\overline{AQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Pisteen A etäisyys tasosta OBC on 3.

Vastaus 3

280

Merkitään kartion huippua eli pistettä $(9,-2,-7)$ kirjaimella A.

Kartion tilavuus on $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, missä r on pohjaympyrän säde ja h kartion korkeus. Lasketaan ensin kartion korkeus eli pisteen A etäisyys annetusta tasosta.

Olkoon Q se tason $\overline{OP}=\overline{i}-\overline{j}-6\overline{k}+s(-\overline{i}+2\overline{j}+6\overline{k})+t(\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k})$ piste, joka on lähimpänä kartion huippua A. Tällöin vektori $\overline{AQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{u}=-\overline{i}+2\overline{j}+6\overline{k}$ ja $\overline{v}=\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k}$, jotka voidaan lukea suoraan tason vektoriyhtälöstä. Lisäksi taso sisältää vektoriyhtälön mukaan pisteen $(1,-1,-6)$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = -1 + 2s + 4t \\ z = -6 + 6s + 3t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja. (Esitys voidaan myös lukea suoraan vektoriyhtälöstä.)

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q=(1-s+t,-1+2s+4t,-6+6s+3t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{AQ}$ lauseke.

$$\overline{AQ} = (1-s+t-9)\overline{i} + (-1+2s+4t-(-2))\overline{j} + (-6+6s+3t-(-7))\overline{k}$$
$$= (-8-s+t)\overline{i} + (1+2s+4t)\overline{j} + (1+6s+3t)\overline{k}$$

Koska vektori $\overline{AQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{u} = -\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}$ ja $\overline{v} = \overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$ vastaan. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{AQ} \cdot \overline{u} = 0 \\ \overline{AQ} \cdot \overline{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-8-s+t)\overline{i} + (1+2s+4t)\overline{j} + (1+6s+3t)\overline{k}) \cdot (-\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k}) = 0 \\ ((-8-s+t)\overline{i} + (1+2s+4t)\overline{j} + (1+6s+3t)\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-8-s+t) \cdot (-1) + (1+2s+4t) \cdot 2 + (1+6s+3t) \cdot 6 = 0 \\ (-8-s+t) \cdot 1 + (1+2s+4t) \cdot 4 + (1+6s+3t) \cdot 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41s + 25t + 16 = 0 \\ 25s + 26t - 1 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = -1$ ja $t = 1$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s=-1$ ja $t=1$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 1 - s + t = 1 - (-1) + 1 = 3 \\ y = -1 + 2s + 4t = -1 + 2\cdot(-1) + 4 = 1 \\ z = -6 + 6s + 3t = -6 + 6\cdot(-1) + 3 = -9 \end{cases}$$

Siten piste $Q(3,1,-9)$ on tason pisteistä lähimpänä kartion huippua A.

Huipun A etäisyys tasosta on pisteiden A ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{AQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{AQ} = (3-9)\overline{i} + (1-(-2))\overline{j} + (-9-(-7))k = -6\overline{i} + 3\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\left|\overline{AQ}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Pisteen A etäisyys tasosta on 7. Kyseessä on siis myös tutkittavan kartion korkeus h.

Koska pohjaympyrän säteen r ja kartion korkeuden suhde on $3:1$, ympyrän säteeksi saadaan

$$\frac{r}{h} = \frac{3}{1}$$

$$r = 3h = 3\cdot 7 = 21.$$

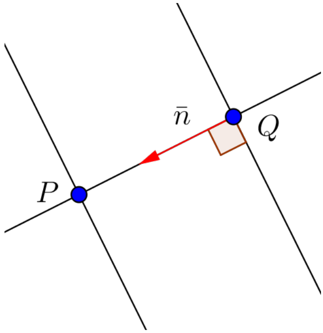
Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 21^2 \cdot 7 = 1029\pi$.

Vastaus $\quad 1029\pi$

281

On laskettava kahden annetun tason välinen etäisyys. Määritetään ensin esimerkiksi ensimmäiseltä tasolta jokin piste ja lasketaan sen etäisyys jälkimmäisestä tasosta.

Tasolla $2x + y - 5z = 1$ on esimerkiksi piste $(0,1,0)$, sillä pisteen koordinaatit toteuttavat tason yhtälön. Merkitään tätä pistettä kirjaimella P.



Olkoon Q se jälkimmäisen tason $2x + y - 5z + 71 = 0$ piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason $2x + y - 5z + 71 = 0$ normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $2x + y - 5z + 71 = 0$ yksi normaalivektori on $\overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(0,1,0)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \quad 2t \\ y = 1 + \ t \\ z = \ \ -5t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $2x + y - 5z + 71 = 0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$2 \cdot 2t + (1 + t) - 5 \cdot (-5t) + 71 = 0$$

$$30t + 72 = 0$$

$$t = -\frac{12}{5}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -\frac{12}{5}$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 2t = 2 \cdot (-\frac{12}{5}) = -\frac{24}{5} \\ y = 1 + t = 1 + (-\frac{12}{5}) = -\frac{7}{5} \\ z = -5t = -5 \cdot (-\frac{12}{5}) = 12 \end{cases}$$

Siten piste $Q(-\frac{24}{5}, -\frac{7}{5}, 12)$ on jälkimmäisen tason pisteistä lähimpänä ensimmäisen tason pistettä P.

Tasojen välinen etäisyys on sama kuin pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (-\frac{24}{5} - 0)\overline{i} + (-\frac{7}{5} - 1)\overline{j} + (12 - 0)\overline{k}$$

$$= -\frac{24}{5}\overline{i} - \frac{12}{5}\overline{j} + 12\overline{k}$$

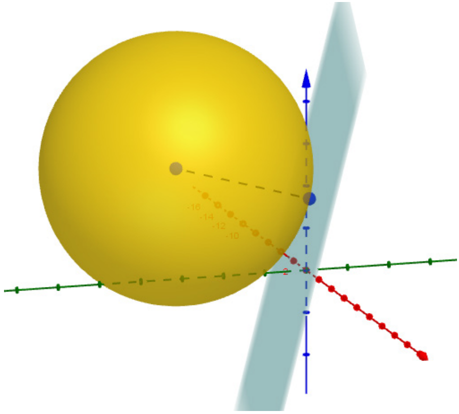
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-\frac{24}{5})^2 + (-\frac{12}{5})^2 + 12^2} = \sqrt{\frac{4320}{25}} = \frac{12\sqrt{30}}{5}$$

Siis tasojen välinen etäisyys on $\frac{12\sqrt{30}}{5}$.

Vastaus $\frac{12\sqrt{30}}{5}$

282

Merkitään pallon keskipistettä kirjaimella P. Lasketaan ensin pallon säde eli keskipisteen P etäisyys tasosta $x+4y-z+3=0$.



Olkoon Q se tason $x+4y-z+3=0$ piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason $x+4y-z+3=0$ normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason $x+4y-z+3=0$ yksi normaalivektori on $\overline{n}=\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$.

Normaalisuora kulkee pallon keskipisteen $P(-1,-6,5)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-6+4t \\ z=5-t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön $x+4y-z+3=0$ ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$
\begin{aligned}
(-1+t)+4\cdot(-6+4t)-(5-t)+3&=0\\
18t-27&=0\\
t&=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=\frac{3}{2}$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$
\begin{cases}
x=-1+t=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\\
y=-6+4t=-6+4\cdot\frac{3}{2}=0\\
z=5-t=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}
\end{cases}
$$

Saadaan piste $Q(\frac{1}{2},0,\frac{7}{2})$.

Pallon säde on keskipisteen P etäisyys tasosta $x+4y-z+3=0$ eli pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (\frac{1}{2}-(-1))\overline{i} + (0-(-6))\overline{j} + (\frac{7}{2}-5)\overline{k}$$

$$= \frac{3}{2}\overline{i} + 6\overline{j} - \frac{3}{2}\overline{k}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 6^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{162}{4}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

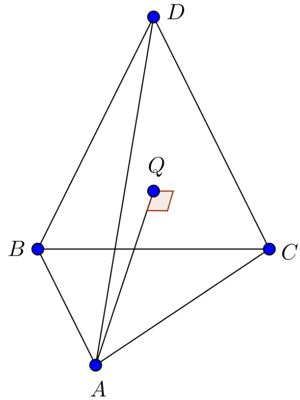
Siten pallon säde on $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ ja pinta-ala

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(\frac{9\sqrt{2}}{2})^2 = 162\pi\,.$$

Vastaus $\quad 162\pi$

283

On laskettava pisteen A etäisyys pisteiden B, C ja D määräämästä tasosta BCD.



Olkoon Q se tason BCD piste, joka on lähimpänä pistettä A. Tällöin vektori $\overline{AQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{BC}$ ja $\overline{BD}$.

$$\overline{BC} = (-3-(-2))\overline{i} + (3-(-5))\overline{j} + (0-0)\overline{k}$$

$$= -\overline{i} + 8\overline{j} + 0\overline{k} = -\overline{i} + 8\overline{j}$$

$$\overline{BD} = (0-(-2))\overline{i} + (0-(-5))\overline{j} + (10,5-0)\overline{k}$$

$$= 2\overline{i} + 5\overline{j} + 10,5\overline{k}$$

Taso sisältää pisteen $B(-2,-5,0)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -2 - s + 2t \\ y = -5 + 8s + 5t \\ z = 10,5t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (-2 - s + 2t; -5 + 8s + 5t; 10,5t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{AQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= (-2 - s + 2t - 6)\overline{i} + (-5 + 8s + 5t - 0)\overline{j} + (10,5t - 0)\overline{k} \\ &= (-8 - s + 2t)\overline{i} + (-5 + 8s + 5t)\overline{j} + 10,5t\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{AQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita $\overline{BC} = -\overline{i} + 8\overline{j}$ ja $\overline{BD} = 2\overline{i} + 5\overline{j} + 10,5\overline{k}$ vastaan.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases} \overline{AQ} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{AQ} \cdot \overline{BD} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((-8 - s + 2t)\overline{i} + (-5 + 8s + 5t)\overline{j} + 10{,}5t\overline{k}) \cdot (-\overline{i} + 8\overline{j}) = 0 \\ ((-8 - s + 2t)\overline{i} + (-5 + 8s + 5t)\overline{j} + 10{,}5t\overline{k}) \cdot (2\overline{i} + 5\overline{j} + 10{,}5\overline{k}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-8 - s + 2t) \cdot (-1) + (-5 + 8s + 5t) \cdot 8 + 10{,}5t \cdot 0 = 0 \\ (-8 - s + 2t) \cdot 2 + (-5 + 8s + 5t) \cdot 5 + 10{,}5t \cdot 10{,}5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 65s + 38t - 32 = 0 \\ 38s + 139{,}25t - 41 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = \dfrac{8}{21}$ ja $t = \dfrac{4}{21}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = \frac{8}{21}$ ja $t = \frac{4}{21}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -2 - s + 2t = -2 - \frac{8}{21} + 2 \cdot \frac{4}{21} = -2 \\ y = -5 + 8s + 5t = -5 + 8 \cdot \frac{8}{21} + 5 \cdot \frac{4}{21} = -1 \\ z = 10,5t = 10,5 \cdot \frac{4}{21} = 2 \end{cases}$$

Saadaan piste $(-2, -1, 2)$.

Pisteen A etäisyys tasosta BCD on pisteiden A ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{AQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{AQ} &= (-2-6)\overline{i} + (-1-0)\overline{j} + (2-0)\overline{k} \\ &= -8\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} \end{aligned}$$

$$\left|\overline{AQ}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{69} \approx 8,3$$

Pisteen A etäisyys tasosta BCD on $\sqrt{69} \approx 8,3$. Siten poratun reiän pituus on 8,3 cm.

Vastaus 8,3 cm