168

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (3\overline{i}+5\overline{j})\cdot(7\overline{i}-3\overline{j})\\ &= 3\cdot 7+5\cdot(-3)\\ &= 21-15\\ &= 6\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}\neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (-2\overline{i}-\overline{j})\cdot(4\overline{i}-8\overline{j})\\ &= (-2)\cdot 4-1\cdot(-8)\\ &= -8+8\\ &= 0\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus
a) $\overline{a}\cdot\overline{b}=6$, eivät ole kohtisuorassa
b) $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, ovat kohtisuorassa

169

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} + 4\overline{j} + 5\overline{k})$$

$$= 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5$$

$$= -6 - 4 + 10$$

$$= 0$$

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (2\overline{i} - 4\overline{j} + 3\overline{k}) \cdot (5\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k})$$

$$= 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

$$= 10 - 8 + 3$$

$$= 5$$

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} \neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus a) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, ovat kohtisuorassa
b) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 5$, eivät ole kohtisuorassa

170

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (2\overline{i}-3\overline{j})\cdot(-8\overline{i}-12\overline{j})\\ &= 2\cdot(-8)-3\cdot(-12)\\ &= -16+36\\ &= 20\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}\neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k})\cdot(3\overline{i}+\overline{j}+5\overline{k})\\ &= 1\cdot 3+2\cdot 1-1\cdot 5\\ &= 3+2-5\\ &= 0\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus a) eivät ole kohtisuorassa
b) ovat kohtisuorassa

171

a) Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

$$(2\overline{i} - 5\overline{j}) \cdot (t\overline{i} + 6\overline{j}) = 0$$

$$2t - 5 \cdot 6 = 0$$

$$2t = 30$$

$$t = 15$$

b) Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

$$(t\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}) \cdot (2t\overline{i} + t\overline{j} + 4\overline{k}) = 0$$

$$t \cdot 2t + 2t - 1 \cdot 4 = 0$$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0 \qquad | : 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$t = \frac{-1+3}{2} \quad \text{tai} \quad t = \frac{-1-3}{2}$$

$$t = 1 \qquad \text{tai} \quad t = -2$$

Vastaus a) $t = 15$
b) $t = -2$ tai $t = 1$

172

a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0$$

$$(t\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k})\cdot(4\overline{i}+t\overline{j}+2\overline{k})=0$$

$$4t+2t-3\cdot 2=0$$

$$6t=6$$

$$t=1$$

b) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0$$

$$(t\overline{i}-5\overline{j}+2\overline{k})\cdot(t\overline{i}+t\overline{j}+3\overline{k})=0$$

$$t\cdot t-5t+2\cdot 3=0$$

$$t^2-5t+6=0$$

$$t=2 \quad \text{tai} \quad t=3$$

Vastaus a) $t=1$
b) $t=2$ tai $t=3$

173

Kolmio on suorakulmainen, jos jokin sen kulmista on suora.

Muodostetaan vektorit, jotka määräävät kolmion ABC sivut.

$$\overline{AB} = (5-1)\overline{i} + (3-0)\overline{j} + (-1-2)\overline{k}$$

$$= 4\overline{i} + 3\overline{j} - 3\overline{k}$$

$$\overline{AC} = (4-1)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (7-2)\overline{k}$$

$$= 3\overline{i} + \overline{j} + 5\overline{k}$$

$$\overline{BC} = (4-5)\overline{i} + (1-3)\overline{j} + (7-(-1))\overline{k}$$

$$= -\overline{i} - 2\overline{j} + 8\overline{k}$$

Lasketaan sivuvektorien pistetulot.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (4\overline{i} + 3\overline{j} - 3\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + \overline{j} + 5\overline{k})$$

$$= 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 5$$

$$= 12 + 3 - 15$$

$$= 0$$

Koska pistetulo $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$, niin sivut AB ja AC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Siten kolmion kulma A on suora ja kolmio on suorakulmainen. □

(Koska suorakulma löydettiin heti, muiden sivuvektorien pistetuloja ei tarvitse laskea.)

174

a) Kulma B on suora, jos sivuvektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Muodostetaan sivuvektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$.

$$\overline{BA} = (-2-3)\overline{i} + (t-0)\overline{j} + (4-(-1))\overline{k}$$

$$= -5\overline{i} + t\overline{j} + 5\overline{k}$$

$$\overline{BC} = (1-3)\overline{i} + (-2-0)\overline{j} + (-3-(-1))\overline{k}$$

$$= -2\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$$

$$(-5\overline{i} + t\overline{j} + 5\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}) = 0$$

$$(-5) \cdot (-2) + t \cdot (-2) + 5 \cdot (-2) = 0$$

$$10 - 2t - 10 = 0$$

$$t = 0$$

Kulma B on suora, jos $t = 0$.

b) Kulma C on suora, jos sivuvektorit $\overline{CA}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Muodostetaan sivuvektori $\overline{CA}$. Sivuvektori $\overline{BC}$ laskettiin jo a-kohdassa.

$$\overline{CA} = (-2-1)\overline{i} + (t-(-2))\overline{j} + (4-(-3))\overline{k}$$

$$= -3\overline{i} + (t+2)\overline{j} + 7\overline{k}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\overline{CA} \cdot \overline{BC} = 0$$

$$(-3\overline{i} + (t+2)\overline{j} + 7\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}) = 0$$

$$(-3) \cdot (-2) + (t+2) \cdot (-2) + 7 \cdot (-2) = 0$$

$$6 - 2(t+2) - 14 = 0$$

$$-2t - 12 = 0$$

$$t = -6$$

Kulma C on suora, jos $t = -6$.

Vastaus a) $t = 0$
b) $t = -6$

175

Lasketaan ensin vektorin $\overline{a}+\overline{b}$ pituuden neliö $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|^2$.

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|^2$$

$$=(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b})$$

$$=\overline{a}\cdot\overline{a}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{a}+\overline{b}\cdot\overline{b}$$

$$=\overline{a}\cdot\overline{a}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{b}$$

$$=\left|\overline{a}\right|^2+2\overline{a}\cdot\overline{b}+\left|\overline{b}\right|^2$$

$$=3^2+2\cdot 13+7^2$$

$$=84$$

(Laskussa käytettiin tietoja $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=7$ ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=13$.)

Vektorin $\overline{a}+\overline{b}$ pituus on

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{84}=2\sqrt{21}\,.$$

Vastaus $\quad 2\sqrt{21}$

176

Lasketaan ensin vektorin $2\overline{a} - 5\overline{b}$ pituuden neliö $\left|2\overline{a} - 5\overline{b}\right|^2$.

$$
\begin{aligned}
&\left|2\overline{a} - 5\overline{b}\right|^2 \\
&= (2\overline{a} - 5\overline{b}) \cdot (2\overline{a} - 5\overline{b}) \\
&= 2\overline{a} \cdot 2\overline{a} + 2\overline{a} \cdot (-5\overline{b}) - 5\overline{b} \cdot 2\overline{a} - 5\overline{b} \cdot (-5\overline{b}) \\
&= 4\overline{a} \cdot \overline{a} - 10\overline{a} \cdot \overline{b} - 10\overline{a} \cdot \overline{b} + 25\overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= 4\left|\overline{a}\right|^2 - 20\overline{a} \cdot \overline{b} + 25\left|\overline{b}\right|^2 \\
&= 4 \cdot (\sqrt{5})^2 - 20 \cdot (-2) + 25 \cdot (\sqrt{3})^2 \\
&= 135
\end{aligned}
$$

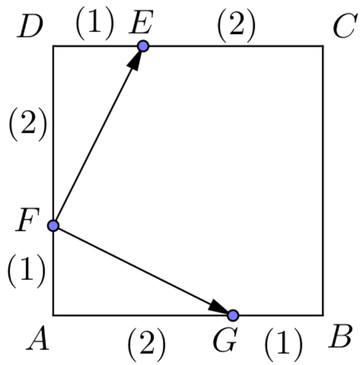
(Laskussa käytettiin tietoja $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{3}$ ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = -2$.)

Vektorin $2\overline{a} - 5\overline{b}$ pituus on

$$\left|2\overline{a} - 5\overline{b}\right| = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}.$$

Vastaus $3\sqrt{15}$

177



Vektorit $\overline{FG}$ ja $\overline{FE}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Määritetään vektorit $\overline{FG}$ ja $\overline{FE}$ neliön kärkipisteestä A lähtevien sivuvektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla. Nämä kelpaavat kantavektoreiksi, koska ne ovat erisuuntaiset ja kumpikaan ei ole nollavektori.

$$\begin{aligned}\overline{FG} &= \overline{FA} + \overline{AG} \\ &= \frac{1}{3}\overline{DA} + \frac{2}{3}\overline{AB} \\ &= -\frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AB} \\ &= \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{FE} &= \overline{FD} + \overline{DE} \\ &= \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{DC} \\ &= \frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{AB} \\ &= \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}\end{aligned}$$

Lasketaan vektorien $\overline{FG}$ ja $\overline{FE}$ pistetulo.

$$\overline{FG}\cdot\overline{FE}=(\frac{2}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AD})\cdot(\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{AD})$$

$$=\frac{2}{3}\overline{AB}\cdot\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{2}{3}\overline{AB}\cdot\frac{2}{3}\overline{AD}-\frac{1}{3}\overline{AD}\cdot\frac{1}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AD}\cdot\frac{2}{3}\overline{AD}$$

$$=\frac{2}{9}\overline{AB}\cdot\overline{AB}+\frac{4}{9}\overline{AB}\cdot\overline{AD}-\frac{1}{9}\overline{AD}\cdot\overline{AB}-\frac{2}{9}\overline{AD}\cdot\overline{AD}$$

$$=\frac{2}{9}\left|\overline{AB}\right|^2+0-0-\frac{2}{9}\left|\overline{AD}\right|^2$$

$$=\frac{2}{9}\left|\overline{AB}\right|^2-\frac{2}{9}\left|\overline{AD}\right|^2$$

$$=0$$

Laskussa käytettiin tietoa, että $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=0$ (ja $\overline{AD}\cdot\overline{AB}=0$). Tulos seuraa siitä, että neliön sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lopputulos taas seuraa siitä, että neliön sivuina vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ ovat yhtä pitkät eli $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}\right|$.

Koska pistetulo $\overline{FG}\cdot\overline{FE}=0$, niin vektorit $\overline{FG}$ ja $\overline{FE}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

178

a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0$$

$$(3\overline{i}+4\overline{j})\cdot(s\overline{i}+t\overline{j})=0$$

$$3s+4t=0$$

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla niillä vakioiden s ja t (reaaliluku)arvoilla, jotka toteuttavat yhtälön $3s+4t=0$. Tällaiset arvot ovat esimerkiksi $s=4$ ja $t=-3$ tai $s=-\frac{1}{3}$ ja $t=\frac{1}{4}$.

b) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0$$

$$(2\overline{i}-3\overline{j})\cdot(s\overline{i}+t\overline{j})=0$$

$$2s-3t=0$$

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla niillä vakioiden s ja t (reaaliluku)arvoilla, jotka toteuttavat yhtälön $2s-3t=0$. Tällaiset arvot ovat esimerkiksi $s=3$ ja $t=2$ tai $s=-10$ ja $t=-\frac{20}{3}$.

c) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

$$(x\overline{i} + y\overline{j}) \cdot (s\overline{i} + t\overline{j}) = 0$$

$$xs + yt = 0$$

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla niillä vakioiden s ja t (reaaliluku)arvoilla, jotka toteuttavat yhtälön $xs + yt = 0$. Tällaiset arvot ovat esimerkiksi $s = y$ ja $t = -x$.

Vastaus a) esimerkiksi $s = 4$ ja $t = -3$
b) esimerkiksi $s = 3$ ja $t = 2$
c) esimerkiksi $s = y$ ja $t = -x$

179

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{i}+3\overline{j}-2\overline{k})\cdot(6\overline{i}-4\overline{j}-3\overline{k})$$
$$=1\cdot 6+3\cdot(-4)-2\cdot(-3)$$
$$=6-12+6$$
$$=0$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(6\overline{i}+5\overline{j}+\overline{k})\cdot(-2\overline{i}-4\overline{k})$$
$$=6\cdot(-2)+5\cdot 0+1\cdot(-4)$$
$$=-12+0-4$$
$$=-16$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}\neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus a) $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, ovat kohtisuorassa
b) $\overline{a}\cdot\overline{b}=-16$, eivät ole kohtisuorassa

180

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{i}-3\overline{k})\cdot(4\overline{i}-2\overline{j})$$

$$=(\overline{i}+0\overline{j}-3\overline{k})\cdot(4\overline{i}-2\overline{j}+0\overline{k})$$

$$=1\cdot 4+0\cdot(-2)-3\cdot 0$$

$$=4+0+0$$

$$=4$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}\neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{i}+\frac{3}{4}\overline{j}-\frac{1}{2}\overline{k})\cdot(\frac{1}{3}\overline{i}-\overline{j}-\frac{5}{6}\overline{k})$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{5}{6})$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}$$

$$=\frac{4}{12}-\frac{9}{12}+\frac{5}{12}=\frac{4-9+5}{12}$$

$$=0$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus a) eivät ole kohtisuorassa
b) ovat kohtisuorassa

181

a) Kulma A on suora, jos sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Muodostetaan sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2-1)\overline{i} + (1-(-1))\overline{j} + (1-0)\overline{k} \\ &= \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (3-1)\overline{i} + (t-(-1))\overline{j} + (2-0)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + (t+1)\overline{j} + 2\overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ (\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}) \cdot (2\overline{i} + (t+1)\overline{j} + 2\overline{k}) &= 0 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (t+1) + 1 \cdot 2 &= 0 \\ 2 + 2t + 2 + 2 &= 0 \\ t &= -3\end{aligned}$$

Kulma A on suora, jos $t = -3$.

b) Kulma B on suora, jos sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Muodostetaan sivuvektori $\overline{BC}$. Sivuvektori $\overline{AB}$ laskettiin jo a-kohdassa.

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (3-2)\overline{i} + (t-1)\overline{j} + (2-1)\overline{k} \\ &= \overline{i} + (t-1)\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{BC} &= 0 \\ (\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}) \cdot (\overline{i} + (t-1)\overline{j} + \overline{k}) &= 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (t-1) + 1 \cdot 1 &= 0 \\ 1 + 2t - 2 + 1 &= 0 \\ t &= 0\end{aligned}$$

Kulma B on suora, jos $t = 0$.

c) Kulma C on suora, jos sivuvektorit $\overline{AC}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Molemmat sivuvektorit $\overline{AC}$ ja $\overline{BC}$ laskettiin jo a- ja b-kohdissa.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BC} &= 0 \\ (2\overline{i} + (t+1)\overline{j} + 2\overline{k}) \cdot (\overline{i} + (t-1)\overline{j} + \overline{k}) &= 0 \\ 2 \cdot 1 + (t+1) \cdot (t-1) + 2 \cdot 1 &= 0 \\ 2 + t^2 - 1 + 2 &= 0 \\ t^2 &= -3 \end{aligned}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, sillä luvun neliö on aina epänegatiivinen. (Yhtälöä voidaan tutkia myös laskimella.) Siten kulma C ei ole suora millään vakion t arvolla.

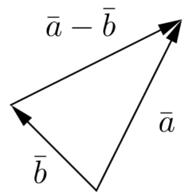
Vastaus
a) $t = -3$
b) $t = 0$
c) ei millään vakion t arvolla

182

Kolmio on suorakulmainen, jos jokin sen kulmista on suora.

Tarkastellaan vektoreita, jotka määräävät kolmion sivut. Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{a} = t\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}$, $\overline{b} = (t-1)\overline{i} + t\overline{j} - 3\overline{k}$ ja näiden erotusvektorista

$$\begin{aligned}\overline{a} - \overline{b} &= t\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k} - ((t-1)\overline{i} + t\overline{j} - 3\overline{k}) \\ &= t\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k} - (t-1)\overline{i} - t\overline{j} + 3\overline{k} \\ &= \overline{i} - (t+3)\overline{j} + 2\overline{k}.\end{aligned}$$



Kolmion kulma on suora, jos kulmasta lähtevät tai siihen tulevat sivuvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Tarkastellaan erikseen kutakin kulmaa muodostamalla ja ratkaisemalla yhtälö kullekin vektoriparille.

Ensimmäinen kulma:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

$$(t\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) \cdot ((t-1)\overline{i} + t\overline{j} - 3\overline{k}) = 0$$

$$t \cdot (t-1) - 3t - 1 \cdot (-3) = 0$$

$$t^2 - t - 3t + 3 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 1 \quad \text{tai} \quad t = 3 \qquad \text{(laskimella)}$$

Kulma on suora, jos $t = 1$ tai $t = 3$.

Toinen kulma:

$$\overline{a} \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 0$$

$$(t\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) \cdot (\overline{i} - (t+3)\overline{j} + 2\overline{k}) = 0$$

$$t - 3 \cdot (-(t+3)) - 1 \cdot 2 = 0$$

$$t + 3t + 9 - 2 = 0$$

$$t = -\frac{7}{4}$$

Kulma on suora, jos $t = -\frac{7}{4}$.

Kolmas kulma:

$$\overline{b} \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 0$$

$$((t-1)\overline{i} + t\overline{j} - 3\overline{k}) \cdot (\overline{i} - (t+3)\overline{j} + 2\overline{k}) = 0$$

$$(t-1) \cdot 1 + t \cdot (-(t+3)) - 3 \cdot 2 = 0$$

$$t - 1 - t^2 - 3t - 6 = 0$$

$$-t^2 - 2t - 7 = 0$$

ei ratkaisua (laskimella)

Kulma ei ole suora millään vakion t arvolla.

Kaiken kaikkiaan saatiin siis, että kolmio on suorakulmainen, jos $t = 1$, $t = 3$ tai $t = -\frac{7}{4}$.

Vastaus $t = 1$, $t = 3$ tai $t = -\frac{7}{4}$

183

Lasketaan ensin vektorin $2\overline{a}+3\overline{b}$ pituuden neliö $\left|2\overline{a}+3\overline{b}\right|^2$.

$$\begin{aligned}
&\left|2\overline{a}+3\overline{b}\right|^2\\
&=(2\overline{a}+3\overline{b})\cdot(2\overline{a}+3\overline{b})\\
&=2\overline{a}\cdot 2\overline{a}+2\overline{a}\cdot 3\overline{b}+3\overline{b}\cdot 2\overline{a}+3\overline{b}\cdot 3\overline{b}\\
&=4\overline{a}\cdot\overline{a}+6\overline{a}\cdot\overline{b}+6\overline{a}\cdot\overline{b}+9\overline{b}\cdot\overline{b}\\
&=4\left|\overline{a}\right|^2+12\overline{a}\cdot\overline{b}+9\left|\overline{b}\right|^2\\
&=4\cdot 6^2+12\cdot 30+9\cdot 8^2\\
&=1080
\end{aligned}$$

(Laskussa käytettiin tietoja $\left|\overline{a}\right|=6$, $\left|\overline{b}\right|=8$ ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=30$.)

Vektorin $2\overline{a}+3\overline{b}$ pituus on

$$\left|2\overline{a}+3\overline{b}\right|=\sqrt{1080}=6\sqrt{30}.$$

Vastaus $6\sqrt{30}$

184

Lasketaan ensin $\left|2\overline{a}-5\overline{b}\right|^2$.

$$\left|2\overline{a}-5\overline{b}\right|^2$$

$$=(2\overline{a}-5\overline{b})\cdot(2\overline{a}-5\overline{b})$$

$$=2\overline{a}\cdot 2\overline{a}+2\overline{a}\cdot(-5\overline{b})-5\overline{b}\cdot 2\overline{a}-5\overline{b}\cdot(-5\overline{b})$$

$$=4\overline{a}\cdot\overline{a}-10\overline{a}\cdot\overline{b}-10\overline{a}\cdot\overline{b}+25\overline{b}\cdot\overline{b}$$

$$=4\left|\overline{a}\right|^2-20\overline{a}\cdot\overline{b}+25\left|\overline{b}\right|^2$$

$$=4\cdot(\sqrt{7})^2-20\cdot 5+25\cdot(3\sqrt{5})^2$$

$$=1053$$

(Laskussa käytettiin tietoja $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{7}$, $\left|\overline{b}\right|=3\sqrt{5}$ ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=5$.)

Siten

$$\left|2\overline{a}-5\overline{b}\right|=\sqrt{1053}=9\sqrt{13}.$$

Vastaus $\quad 9\sqrt{13}$

185

a) Vektori $\overline{u} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ on kohtisuorassa vektoreita $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ vastaan täsmälleen silloin, kun molemmat pistetulot $\overline{a} \cdot \overline{u}$ ja $\overline{b} \cdot \overline{u}$ ovat nollia.

Muodostetaan ja ratkaistaan syntyvät kaksi yhtälöä eli yhtälöpari.

$$\overline{a} \cdot \overline{u} = 0$$

$$(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$\overline{b} \cdot \overline{u} = 0$$

$$(2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}) \cdot (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = 0$$

$$2x - y + 3z = 0$$

Päädyttiin siis yhtälöpariin

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Poistetaan saadusta yhtälöparista muuttuja y ja ratkaistaan muuttuja z muuttujan x avulla.

$$+\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{}$$

$$3x \qquad + 4z = 0$$

$$z = -\frac{3}{4}x$$

Sijoitetaan $z = -\frac{3}{4}x$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja y muuttujan x avulla.

$$x + y + z = 0$$

$$x + y - \frac{3}{4}x = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}x$$

On siis saatu $y = -\frac{1}{4}x$ ja $z = -\frac{3}{4}x$. Jos valitaan esimerkiksi $x = 4$, saadaan $y = -1$ ja $z = -3$, joten vektoriksi $\overline{u}$ saadaan $\overline{u} = 4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$.

b) Vektoreita $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ vastaan kohtisuorat yksikkövektorit ovat a-kohdassa saadun vektorin $\overline{u} = 4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$ suuntainen yksikkövektori $\overline{u}^0$ ja kyseisen yksikkövektorin vastavektori $-\overline{u}^0$. Määritetään ensin yksikkövektori $\overline{u}^0$.

Vektorin $\overline{u} = 4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{u}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}.$$

Vektorin $\overline{u}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{u}^0 = \frac{1}{|\overline{u}|} \cdot \overline{u}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{26}}(4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}) = \frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} - \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}.$$

Siten kysytyt yksikkövektorit ovat

$\overline{u}^0 = \frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} - \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}$ ja vastavektori

$-\overline{u}^0 = -\frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} + \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}$.

Vastaus a) esimerkiksi $\overline{u} = 4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$

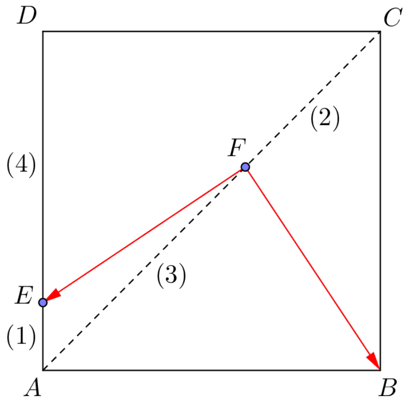
b) $\frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} - \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}$ ja

$-\frac{4}{\sqrt{26}}\overline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\overline{j} + \frac{3}{\sqrt{26}}\overline{k}$

HUOM. a-kohdassa kannattaa vielä tarkistaa suoralla laskulla, että yhtälöt $\overline{a} \cdot \overline{u} = 0$ ja $\overline{b} \cdot \overline{u} = 0$ toteutuvat, kun $\overline{u} = 4\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$.

186

Vektorit $\overline{FE}$ ja $\overline{FB}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.



Määritetään vektorit $\overline{FE}$ ja $\overline{FB}$ neliön kärkipisteestä A lähtevien sivuvektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ avulla. Nämä kelpaavat kantavektoreiksi, koska ne ovat erisuuntaiset ja kumpikaan ei ole nollavektori.

$$\begin{aligned}\overline{FE} &= \overline{FA}+\overline{AE}\\ &= \frac{3}{5}\overline{CA}+\frac{1}{5}\overline{AD}\\ &= \frac{3}{5}(\overline{CB}+\overline{BA})+\frac{1}{5}\overline{AD}\\ &= \frac{3}{5}(\overline{DA}-\overline{AB})+\frac{1}{5}\overline{AD}\\ &= \frac{3}{5}(-\overline{AD}-\overline{AB})+\frac{1}{5}\overline{AD}\\ &= -\frac{3}{5}\overline{AB}-\frac{2}{5}\overline{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{FB} &= \overline{FA}+\overline{AB}\\ &= \frac{3}{5}\overline{CA}+\overline{AB}\\ &= \frac{3}{5}(\overline{CB}+\overline{BA})+\overline{AB}\\ &= \frac{3}{5}(\overline{DA}-\overline{AB})+\overline{AB}\\ &= \frac{3}{5}(-\overline{AD}-\overline{AB})+\overline{AB}\\ &= \frac{2}{5}\overline{AB}-\frac{3}{5}\overline{AD}\end{aligned}$$

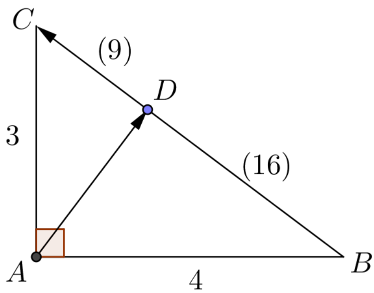
Lasketaan vektorien $\overline{FE}$ ja $\overline{FB}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}
\overline{FE}\cdot\overline{FB} &= (-\frac{3}{5}\overline{AB}-\frac{2}{5}\overline{AD})\cdot(\frac{2}{5}\overline{AB}-\frac{3}{5}\overline{AD}) \\
&= -\frac{3}{5}\overline{AB}\cdot\frac{2}{5}\overline{AB}-\frac{3}{5}\overline{AB}\cdot(-\frac{3}{5}\overline{AD})-\frac{2}{5}\overline{AD}\cdot\frac{2}{5}\overline{AB}-\frac{2}{5}\overline{AD}\cdot(-\frac{3}{5}\overline{AD}) \\
&= -\frac{6}{25}\overline{AB}\cdot\overline{AB}+\frac{9}{25}\overline{AB}\cdot\overline{AD}-\frac{4}{25}\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\frac{6}{25}\overline{AD}\cdot\overline{AD} \\
&= -\frac{6}{25}\left|\overline{AB}\right|^2+0-0+\frac{6}{25}\left|\overline{AD}\right|^2 \\
&= -\frac{6}{25}\left|\overline{AB}\right|^2+\frac{6}{25}\left|\overline{AD}\right|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Laskussa käytettiin tietoa, että $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=0$ (ja $\overline{AD}\cdot\overline{AB}=0$). Tulos seuraa siitä, että neliön sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lopputulos taas seuraa siitä, että neliön sivuina vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ ovat yhtä pitkät eli $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}\right|$.

Koska pistetulo $\overline{FE}\cdot\overline{FB}=0$, niin vektorit $\overline{FE}$ ja $\overline{FB}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

187



Vektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

Määritetään vektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ kolmion kärkipisteestä A lähtevien sivuvektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ avulla. Nämä kelpaavat kantavektoreiksi, koska ne ovat erisuuntaiset ja kumpikaan ei ole nollavektori (ei haittaa, että vektorit ovat eripituiset).

$$
\begin{aligned}
\overline{AD} &= \overline{AB} + \overline{BD} \\
&= \overline{AB} + \frac{16}{25}\overline{BC} \\
&= \overline{AB} + \frac{16}{25}(\overline{BA} + \overline{AC}) \\
&= \overline{AB} + \frac{16}{25}(-\overline{AB} + \overline{AC}) \\
&= \frac{9}{25}\overline{AB} + \frac{16}{25}\overline{AC}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{BC} &= \overline{BA} + \overline{AC} \\
&= -\overline{AB} + \overline{AC}
\end{aligned}
$$

Lasketaan vektorien $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ pistetulo.

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} = (\frac{9}{25}\overline{AB}+\frac{16}{25}\overline{AC})+(-\overline{AB}+\overline{AC})$$

$$= \frac{9}{25}\overline{AB}\cdot(-\overline{AB})+\frac{9}{25}\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\frac{16}{25}\overline{AC}\cdot(-\overline{AB})+\frac{16}{25}\overline{AC}\cdot\overline{AC}$$

$$= -\frac{9}{25}\overline{AB}\cdot\overline{AB}+\frac{9}{25}\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\frac{16}{25}\overline{AC}\cdot\overline{AB}+\frac{16}{25}\overline{AC}\cdot\overline{AC}$$

$$= -\frac{9}{25}\left|\overline{AB}\right|^2+0-0+\frac{16}{25}\left|\overline{AC}\right|^2$$

$$= -\frac{9}{25}\left|\overline{AB}\right|^2+\frac{16}{25}\left|\overline{AC}\right|^2$$

$$= \frac{1}{25}(-9\left|\overline{AB}\right|^2+16\left|\overline{AC}\right|^2)$$

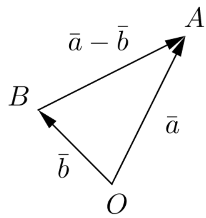
$$= 0$$

Laskussa käytettiin tietoa, että $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=0$ (ja $\overline{AC}\cdot\overline{AB}=0$). Tulos seuraa siitä, että kolmion sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lopputulos taas seuraa siitä, että vektorin $\overline{AB}$ pituus on 4 ja vektorin $\overline{AC}$ pituus 3, joten $3\left|\overline{AB}\right| = 4\left|\overline{AC}\right|$ eli $9\left|\overline{AB}\right|^2 = 16\left|\overline{AC}\right|^2$.

Koska pistetulo $\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$, niin vektorit $\overline{AD}$ ja $\overline{BC}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. □

188

Kolmion OAB sivut määräytyvät vektoreista $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$ ja näiden erotusvektorista $\overline{a} - \overline{b}$.



Kolmannen sivun pituuden neliö on

$$
\begin{aligned}
&|\overline{a} - \overline{b}|^2 \\
&= (\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{a} \cdot (-\overline{b}) - \overline{b} \cdot \overline{a} - \overline{b} \cdot (-\overline{b}) \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + |\overline{b}|^2 \\
&= |\overline{b}|^2,
\end{aligned}
$$

missä viimeinen vaihe seuraa annetusta ehdosta $\overline{a} \cdot \overline{a} = 2\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Tulos tarkoittaa, että vektorit $\overline{a} - \overline{b}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä pitkät, joten kolmion sivut AB ja OB ovat yhtä pitkät. Koska kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, se on tasakylkinen. □

189

Samasta pisteestä lähtevät vektorit $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = x\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{c} = -2\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ voivat olla suorakulmaisen särmiön särmiä vain, jos ne ovat pareittain kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos kaikki pistetulot $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{c}$ ja $\overline{b} \cdot \overline{c}$ ovat nollia.

Muodostetaan ja ratkaistaan syntyvät kolme yhtälöä eli yhtälöryhmä.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

$$(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) \cdot (x\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}) = 0$$

$$2x - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0$$

$$2x - 1 + 3 = 0$$

$$x = -1$$

$$\overline{a} \cdot \overline{c} = 0$$

$$(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) \cdot (-2\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = 0$$

$$2 \cdot (-2) - y + z = 0$$

$$-4 - y + z = 0$$

$$-y + z = 4$$

$$\overline{b} \cdot \overline{c} = 0$$

$$(x\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}) \cdot (-2\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}) = 0$$

$$-2x + y + 3z = 0$$

Päädyttiin siis yhtälöryhmään

$$\begin{cases} x = -1 \\ -y + z = 4 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

jonka ratkaisuksi saadaan laskimella $x = -1$, $y = -\frac{7}{2}$ ja $z = \frac{1}{2}$.

Tällöin särmävektorit ovat

$$\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}, \qquad \overline{b} = x\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k},$$

$$\overline{c} = -2\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = -2\overline{i} - \frac{7}{2}\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}.$$

Vektorien (eli myös särmien) pituudet ovat

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \qquad |\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11},$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-\frac{7}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{66}{4}} = \frac{\sqrt{66}}{2}.$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on särmien pituuksien tulo:

$$V = \sqrt{6} \cdot \sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{66}}{2} = 33.$$

Vastaus $x = -1$, $y = -\frac{7}{2}$ ja $z = \frac{1}{2}$; tilavuus on 33

190

a) Olkoot $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$.

Lasketaan pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot \overline{b} &= (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) \cdot (b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z && \text{reaalilukujen vaihdantalaki:} \\
&= b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z && a_x b_x = b_x a_x \ \text{ jne.} \\
&= (b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}) \cdot (a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) \\
&= \overline{b} \cdot \overline{a}
\end{aligned}$$

On osoitettu, että $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$. □

b) Olkoot $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ ja t jokin reaaliluku. Tällöin

$$t\overline{a} = t(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}) = ta_x\overline{i} + ta_y\overline{j} + ta_z\overline{k}.$$

Lasketaan pistetulo $(t\overline{a})\cdot\overline{b}$.

$$\begin{aligned}(t\overline{a})\cdot\overline{b} &= (ta_x\overline{i} + ta_y\overline{j} + ta_z\overline{k})\cdot(b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k})\\ &= ta_xb_x + ta_yb_y + ta_zb_z\\ &= t(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)\\ &= t(\overline{a}\cdot\overline{b})\end{aligned}$$

On osoitettu, että $(t\overline{a})\cdot\overline{b} = t(\overline{a}\cdot\overline{b})$. □

191

a)

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})$$

$$=6\cdot 8\cdot\cos 60^\circ$$

$$=24$$

b)

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})$$

$$=6\cdot 8\cdot\cos 45^\circ$$

$$=48\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=48\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}$$

c)

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})$$

$$=6\cdot 8\cdot\cos 30^\circ$$

$$=48\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$$

Vastaus a) 24
b) $24\sqrt{2}$
c) $24\sqrt{3}$

192

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 120°$$

Vastaus 120°

193

a) Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (2\overline{i} + \overline{j}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j}) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \qquad |\overline{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45°$$

b) Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (-3\overline{i} + 5\overline{j}) \cdot (2\overline{i} - 6\overline{j})$$
$$= -3 \cdot 2 + 5 \cdot (-6) = -36$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}, \qquad |\overline{b}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{-36}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{10}} = -\frac{9}{\sqrt{85}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \cos^{-1}(-\frac{9}{\sqrt{85}}) = 167,47...° \approx 167°$$

Vastaus a) 45° b) 167°

194

a) Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(2\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k})\cdot(2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})$$

$$=2\cdot 2+4\cdot 1+4\cdot(-1)=4$$

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\sqrt{36}=6$$

$$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a},\overline{b})=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}=\frac{4}{6\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b})=\cos^{-1}(\frac{2}{3\sqrt{6}})=74{,}206...^\circ\approx 74{,}2^\circ$$

b) Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}) \cdot (-5\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k})$$

$$= 3 \cdot (-5) - 2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) = -15$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

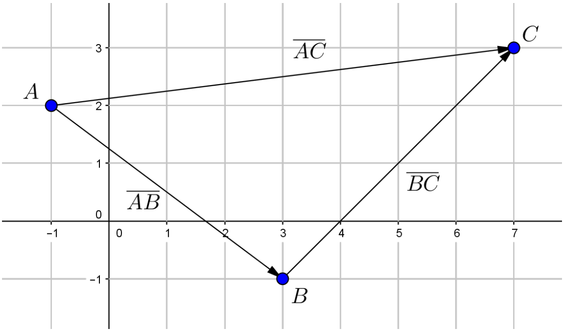
$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{-15}{7 \cdot \sqrt{35}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \cos^{-1}(-\frac{15}{7\sqrt{35}}) = 111{,}235...^\circ \approx 111{,}2^\circ$$

Vastaus a) $74{,}2^\circ$
b) $111{,}2^\circ$

195

Merkitään kolmion kärkipisteitä $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ ja $C(7,3)$.
Kolmion pienin kulma on lyhyimmän sivun vastainen kulma.
Muodostetaan kolmion sivuja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.



Sivu AB:

$$\overline{AB} = (3-(-1))\overline{i} + (-1-2)\overline{j} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$$
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Sivu AC:

$$\overline{AC} = (7-(-1))\overline{i} + (3-2)\overline{j} = 8\overline{i} + \overline{j}$$
$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}1$$

Sivu BC:

$$\overline{BC} = (7-3)\overline{i} + (3-(-1))\overline{j} = 4\overline{i} + 4\overline{j}$$
$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$$

Kolmion lyhyin sivu on AB, joten kolmion pienin kulma on
$\sphericalangle C = \sphericalangle(-\overline{AC}, -\overline{BC}) = \sphericalangle(\overline{AC}, \overline{BC})$.

Lasketaan pistetulo ja vektorien välinen kulma.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = (8\overline{i} + \overline{j}) \cdot (4\overline{i} + 4\overline{j}) = 8 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 36$$

$$\cos(\overline{AC}, \overline{BC}) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{|\overline{AC}||\overline{BC}|} = \frac{36}{\sqrt{65} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{65}\sqrt{2}}$$

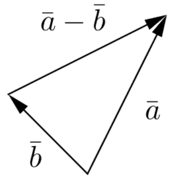
$$\sphericalangle(\overline{AC}, \overline{BC}) = \cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{65}\sqrt{2}}) = 37{,}874...^\circ \approx 37{,}9^\circ$$

Kolmion pienin kulma on $37{,}9^\circ$.

Vastaus $\quad 37{,}9^\circ$

196

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}$ ja näiden erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{a} - \overline{b} &= 4\overline{i} + 3\overline{j} - (\overline{i} - 2\overline{j}) \\ &= 4\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{i} + 2\overline{j} \\ &= 3\overline{i} + 5\overline{j}.\end{aligned}$$

Lasketaan vektorien pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

Lasketaan vektorien väliset pistetulot.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (4\overline{i} + 3\overline{j}) \cdot (\overline{i} - 2\overline{j}) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -2$$

$$\overline{a} \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = (4\overline{i} + 3\overline{j}) \cdot (3\overline{i} + 5\overline{j}) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 27$$

$$-\overline{b} \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = (-\overline{i} + 2\overline{j}) \cdot (3\overline{i} + 5\overline{j}) = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 7$$

(Kuvan perusteella pistetulo $\overline{b} \cdot (\overline{a} - \overline{b})$ antaisi väärän arvon.)

Lasketaan vektorien väliset kulmat.

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{-2}{5\cdot\sqrt{5}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = \cos^{-1}(-\frac{2}{5\sqrt{5}}) = 100,30...^\circ \approx 100^\circ$$

$$\cos(\overline{a},(\overline{a}-\overline{b})) = \frac{\overline{a}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{|\overline{a}||(\overline{a}-\overline{b})|} = \frac{27}{5\cdot\sqrt{34}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},(\overline{a}-\overline{b})) = \cos^{-1}(\frac{27}{5\sqrt{34}}) = 22,16...^\circ \approx 22^\circ$$

$$\cos(-\overline{b},(\overline{a}-\overline{b})) = \frac{-\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{|-\overline{b}||(\overline{a}-\overline{b})|} = \frac{-\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{|\overline{b}||(\overline{a}-\overline{b})|} = \frac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{34}}$$

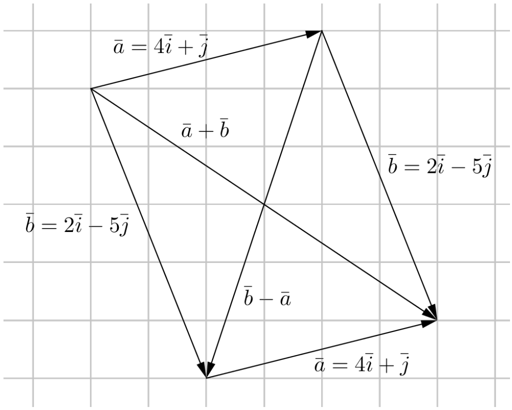
$$\sphericalangle(-\overline{b},(\overline{a}-\overline{b})) = \cos^{-1}(\frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{34}}) = 57,52...^\circ \approx 58^\circ$$

Kolmion kulmat ovat 22°, 58° ja 100°.

Vastaus $\quad 22^\circ$, 58° ja 100°

197

Suunnikkaan lävistäjät ovat vektorit



$$\overline{a} + \overline{b} = 4\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{i} - 5\overline{j}$$

$$= 6\overline{i} - 4\overline{j}$$

ja

$$\overline{b} - \overline{a} = 2\overline{i} - 5\overline{j} - (4\overline{i} + \overline{j})$$

$$= 2\overline{i} - 5\overline{j} - 4\overline{i} - \overline{j}$$

$$= -2\overline{i} - 6\overline{j}.$$

Lasketaan lävistäjävektorien pistetulo ja vektorien pituudet.

$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{b} - \overline{a}) = (6\overline{i} - 4\overline{j}) \cdot (-2\overline{i} - 6\overline{j})$$

$$= 6 \cdot (-2) - 4 \cdot (-6) = 12$$

$$\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\left|\overline{b} - \overline{a}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Lasketaan lävistäjävektorien välinen kulma.

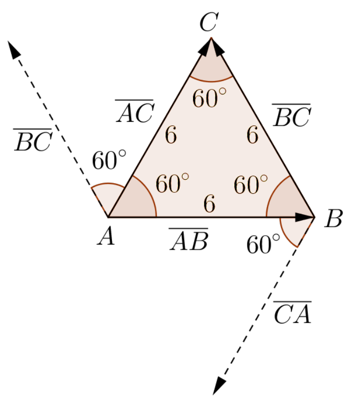
$$\cos((\overline{a} + \overline{b}), (\overline{b} - \overline{a})) = \frac{(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{b} - \overline{a})}{\left|(\overline{a} + \overline{b})\right|\left|(\overline{b} - \overline{a})\right|} = \frac{12}{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{13}\sqrt{10}}$$

$$\sphericalangle((\overline{a} + \overline{b}), (\overline{b} - \overline{a})) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}\sqrt{10}}\right) = 74{,}74\ldots^\circ \approx 75^\circ$$

Vastaus 75°

198

Tilannetta havainnollistaa oheinen kuva. Kuvaan on merkitty myös ylimääräiset vektorit $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$, sillä niistä on apua b- ja c-kohtia ratkaistaessa.



Kaikkien sivuvektorien pituus on 6, joten

$$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{CA}| = |\overline{BC}| = 6.$$

a) Vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ välinen kulma on $60°$, joten

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= |\overline{AB}||\overline{AC}|\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 60° \\ &= 18.\end{aligned}$$

b) Vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ välinen kulma on $60° + 60° = 120°$, joten

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{BC} &= |\overline{AB}||\overline{BC}|\cos(\overline{AB}, \overline{BC}) \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 120° \\ &= -18.\end{aligned}$$

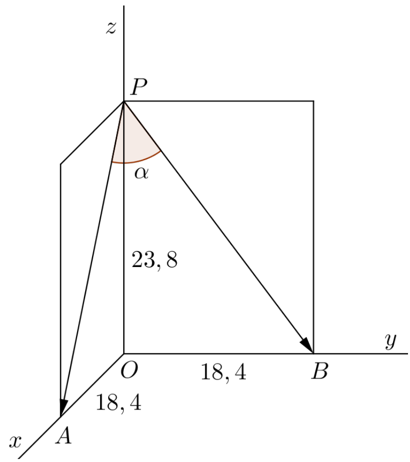
c) Vektorien $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$ välinen kulma on $60° + 60° = 120°$, joten

$$\begin{aligned}\overline{BC} \cdot \overline{CA} &= \left|\overline{BC}\right|\left|\overline{CA}\right| \cos(\overline{BC}, \overline{CA}) \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \cos 120° \\ &= -18.\end{aligned}$$

Vastaus a) 18
b) -18
c) -18

199

Sijoitetaan kirja koordinaatistoon siten, että kirjan selkä on positiivisella z-akselilla, selän alakulma origossa ja sivujen alalaidat positiivisilla x- ja y-akseleilla. Koordinaatiston yksikkö on 1 cm.



Merkitään tarvittavia pisteitä kuvan mukaisesti. Kysytty kulma $\alpha = \sphericalangle(\overline{PA}, \overline{PB})$.

Muodostetaan lävistäjävektorit $\overline{PA}$ ja $\overline{PB}$.

$$\overline{PA} = \overline{PO} + \overline{OA}$$

$$= -23,8\overline{k} + 18,4\overline{i} = 18,4\overline{i} - 23,8\overline{k}$$

$$\overline{PB} = \overline{PO} + \overline{OB}$$

$$= -23,8\overline{k} + 18,4\overline{j} = 18,4\overline{j} - 23,8\overline{k}$$

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (18,4\overline{i} - 23,8\overline{k}) \cdot (18,4\overline{j} - 23,8\overline{k})$$

$$= (18,4\overline{i} + 0\overline{j} - 23,8\overline{k}) \cdot (0\overline{i} + 18,4\overline{j} - 23,8\overline{k})$$

$$= 18,4 \cdot 0 + 0 \cdot 18,4 - 23,8 \cdot (-23,8)$$

$$= 566,44$$

$$\left|\overline{PA}\right| = \sqrt{18,4^2 + (-23,8)^2} = \sqrt{905}$$

$$\left|\overline{PB}\right| = \sqrt{18,4^2 + (-23,8)^2} = \sqrt{905}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{PA}, \overline{PB}) = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\left|\overline{PA}\right|\left|\overline{PB}\right|} = \frac{566,44}{\sqrt{905} \cdot \sqrt{905}} = \frac{566,44}{905}$$

$$\sphericalangle(\overline{PA}, \overline{PB}) = \cos^{-1}(\frac{566,44}{905}) = 51,251...° \approx 51,3°$$

Kulman α suuruudeksi saadaan $51,3°$.

Vastaus $51,3°$

200

Lasketaan ensin vektorien $\overline{a} = 4\overline{j}$ ja $\overline{b} = t\overline{i} + \overline{j}$ pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= 4\overline{j} \cdot (t\overline{i} + \overline{j}) \\ &= (0\overline{i} + 4\overline{j}) \cdot (t\overline{i} + \overline{j}) \\ &= 0 \cdot t + 4 \cdot 1 = 4\end{aligned}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{4^2} = 4$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{t^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

Jos vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $60°$, kulman kosini on $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b})$$

$$4 = 4 \cdot \sqrt{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$t = \sqrt{3} \quad \text{tai} \quad t = -\sqrt{3}$$

Vastaus $\quad t = \sqrt{3}$ tai $t = -\sqrt{3}$

201

a)

$$\begin{aligned}2\overline{a}\cdot 3\overline{b} &= (2\cdot 3)(\overline{a}\cdot\overline{b}) = 6(\overline{a}\cdot\overline{b})\\ &= 6\cdot|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= 6\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 120^\circ\\ &= -60\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2\overline{a}\cdot 3\overline{b} &= (2\cdot 3)(\overline{a}\cdot\overline{b}) = 6(\overline{a}\cdot\overline{b})\\ &= 6\cdot|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= 6\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 135^\circ\\ &= 120\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -120\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -60\sqrt{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}2\overline{a}\cdot 3\overline{b} &= (2\cdot 3)(\overline{a}\cdot\overline{b}) = 6(\overline{a}\cdot\overline{b})\\ &= 6\cdot|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= 6\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 180^\circ\\ &= -120\end{aligned}$$

Vastaus
a) -60
b) $-60\sqrt{2}$
c) -120

202

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$$= \frac{15}{3\sqrt{2}\cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45°$$

Vastaus 45°

203

a) Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (10\overline{i}+12\overline{j}-9\overline{k})\cdot(-5\overline{i}+13\overline{j}-9\overline{k})$$

$$= 10\cdot(-5)+12\cdot 13-9\cdot(-9) = 187$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{10^2+12^2+(-9)^2} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-5)^2+13^2+(-9)^2} = \sqrt{275} = 5\sqrt{11}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{187}{5\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{11}} = \frac{187}{25\sqrt{13}\sqrt{11}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{187}{25\sqrt{13}\sqrt{11}}\right) = 51,28...^\circ \approx 51^\circ$$

b) Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (2\overline{i} - 6\overline{k})\cdot(4\overline{j} + 2\overline{k})$$

$$= (2\overline{i} + 0\overline{j} - 6\overline{k})\cdot(0\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{k})$$

$$= 2\cdot 0 + 0\cdot 4 - 6\cdot 2 = -12$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{-12}{2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{5}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = \cos^{-1}(-\frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{5}}) = 115{,}10...^\circ \approx 115^\circ$$

Vastaus a) 51°
b) 115°

204

Kolmio on tylppäkulmainen, jos sen suurin kulma on suurempi kuin $90°$. Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Muodostetaan kolmion sivuja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.

Sivu AB:

$$\overline{AB} = (4-1)\overline{i} + (3-(-2))\overline{j} + (5-3)\overline{k} = 3\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$$
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{38} \approx 6,2$$

Sivu AC:

$$\overline{AC} = (3-1)\overline{i} + (-5-(-2))\overline{j} + (5-3)\overline{k} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$$
$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{17} \approx 4,1$$

Sivu BC:

$$\overline{BC} = (3-4)\overline{i} + (-5-3)\overline{j} + (5-5)\overline{k} = -\overline{i} - 8\overline{j} + 0\overline{k} = -\overline{i} - 8\overline{j}$$
$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{65} \approx 8,1$$

Kolmion ABC pisin sivu on BC, joten kolmion suurin kulma on $\sphericalangle A = \sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC})$.

Lasketaan pistetulo ja vektorien välinen kulma.

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (3\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}) \cdot (2\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}) = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = -5$$

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{-5}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{38}\sqrt{17}}\right) = 101,3...^\circ > 90^\circ$$

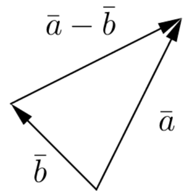
Koska kolmion suurin kulma on tylppä, on kolmio tylppäkulmainen.

□

205

Kolmion pienin kulma on lyhyimmän sivun vastainen kulma.

Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$,
$\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ ja näiden erotusvektorista



$$\begin{aligned}\overline{a} - \overline{b} &= 2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k} - (3\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) \\ &= 2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k} - 3\overline{i} - \overline{j} - \overline{k} \\ &= -\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}.\end{aligned}$$

Lasketaan vektorien pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11} \approx 3,3$$

$$|\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \approx 3,7$$

Kolmion lyhyin sivu on sivu, jonka vektori $\overline{a}$ määrää, joten kolmion pienin kulma on oheisen kuvan mukaan $\sphericalangle(-\overline{b}, (\overline{a} - \overline{b}))$.

Lasketaan pistetulo ja vektorien välinen kulma.

$$-\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{b})=(-3\overline{i}-\overline{j}-\overline{k})\cdot(-\overline{i}-2\overline{j}-3\overline{k})$$

$$=-3\cdot(-1)-1\cdot(-2)-1\cdot(-3)=8$$

$$\cos(-\overline{b},(\overline{a}-\overline{b}))=\frac{-\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{\left|-\overline{b}\right|\left|(\overline{a}-\overline{b})\right|}=\frac{-\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{\left|\overline{b}\right|\left|(\overline{a}-\overline{b})\right|}=\frac{8}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\sphericalangle(-\overline{b},(\overline{a}-\overline{b}))=\cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}\right)=49{,}859...^\circ\approx 49{,}9^\circ$$

Kolmion pienin kulma on $49{,}9^\circ$.

Vastaus $\quad 49{,}9^\circ$

206

Suunnikkaan lävistäjät ovat vektorit (vrt. teht. 197)

$$\overline{a}+\overline{b}=-\overline{i}+2\overline{j}+\frac{5}{2}\overline{k}+2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$$

$$=\overline{i}+\overline{j}+\frac{7}{2}\overline{k}$$

ja

$$\overline{a}-\overline{b}=-\overline{i}+2\overline{j}+\frac{5}{2}\overline{k}-(2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k})$$

$$=-\overline{i}+2\overline{j}+\frac{5}{2}\overline{k}-2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$$

$$=-3\overline{i}+3\overline{j}+\frac{3}{2}\overline{k}.$$

Lasketaan lävistäjävektorien pistetulo ja vektorien pituudet.

$$(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})=(\overline{i}+\overline{j}+\frac{7}{2}\overline{k})\cdot(-3\overline{i}+3\overline{j}+\frac{3}{2}\overline{k})$$

$$=1\cdot(-3)+1\cdot 3+\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

$$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(\frac{7}{2})^2}=\sqrt{\frac{57}{4}}=\frac{\sqrt{57}}{2}$$

$$\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+3^2+(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$$

Lasketaan lävistäjävektorien välinen kulma.

$$\cos((\overline{a}+\overline{b}),(\overline{a}-\overline{b})) = \frac{(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{\left|(\overline{a}+\overline{b})\right|\left|(\overline{a}-\overline{b})\right|} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{\sqrt{57}}{2}\cdot\frac{9}{2}} = \frac{7}{3\sqrt{57}}$$

$$\sphericalangle((\overline{a}+\overline{b}),(\overline{a}-\overline{b})) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{3\sqrt{57}}\right) = 71{,}99\ldots^\circ \approx 72^\circ$$

Vastaus 72°

207

Lasketaan ensin vektorien $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = t\overline{i} + \overline{j}$ pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (\overline{i} + 2\overline{j}) \cdot (t\overline{i} + \overline{j}) \\ &= 1 \cdot t + 2 \cdot 1 \\ &= t + 2\end{aligned}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{t^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

Jos vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $45°$, kulman kosini on $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b})$$

$$t + 2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = 3 \quad \text{tai} \quad t = -\frac{1}{3}$$

Vastaus $\quad t = 3$ tai $t = -\frac{1}{3}$

208

Lasketaan ensin vektorien $\overline{a} = t\overline{i} + t\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{b} = -5\overline{i} + 5\overline{k}$ pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (t\overline{i} + t\overline{j} + 4\overline{k}) \cdot (-5\overline{i} + 5\overline{k}) \\ &= (t\overline{i} + t\overline{j} + 4\overline{k}) \cdot (-5\overline{i} + 0\overline{j} + 5\overline{k}) \\ &= t \cdot (-5) + t \cdot 0 + 4 \cdot 5 \\ &= -5t + 20\end{aligned}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{t^2 + t^2 + 4^2} = \sqrt{2t^2 + 16}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Jos vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $60°$, kulman kosini on $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b})$$

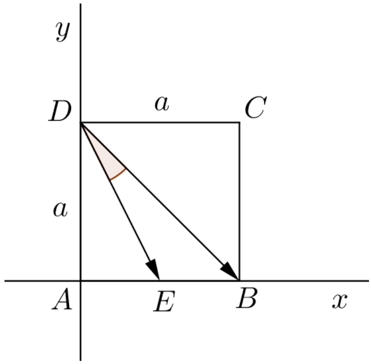
$$-5t + 20 = \sqrt{2t^2 + 16} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$t = 1$$

Vastaus $\quad t = 1$

209

Sijoitetaan neliö koordinaatistoon siten, että kärki A on origossa ja sivut AB ja AD positiivisilla koordinaattiakseleilla.



Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella a sekä neliön muita pisteitä kuvan mukaisesti. Kysytty kulma $\sphericalangle EDB = \sphericalangle(\overline{DE}, \overline{DB})$.

Muodostetaan vektorit $\overline{DE}$ ja $\overline{DB}$.

$$\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AE}$$

$$= -a\overline{j} + \frac{1}{2}a\overline{i} = \frac{1}{2}a\overline{i} - a\overline{j}$$

$$\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB}$$

$$= -a\overline{j} + a\overline{i} = a\overline{i} - a\overline{j}$$

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{DE}\cdot\overline{DB} = (\frac{1}{2}a\overline{i} - a\overline{j})\cdot(a\overline{i} - a\overline{j})$$

$$= \frac{1}{2}a\cdot a - a\cdot(-a)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + a^2$$

$$= \frac{3}{2}a^2$$

$$\left|\overline{DE}\right| = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (-a)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$\left|\overline{DB}\right| = \sqrt{a^2 + (-a)^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{DE},\overline{DB}) = \frac{\overline{DE}\cdot\overline{DB}}{\left|\overline{DE}\right|\left|\overline{DB}\right|} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}\cdot a\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{a^2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

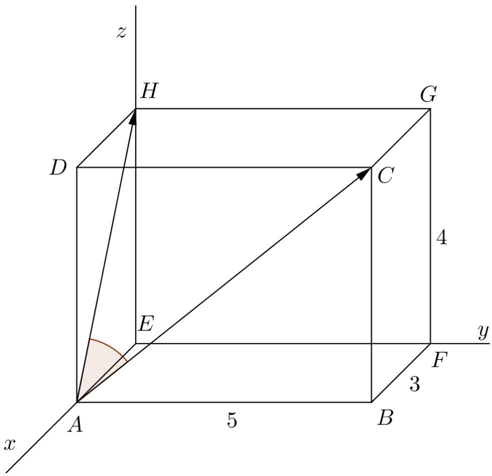
$$\sphericalangle(\overline{DE},\overline{DB}) = \cos^{-1}(\frac{3}{\sqrt{10}}) = 18,434...^\circ \approx 18,4^\circ$$

Kulman $\sphericalangle EDB$ suuruudeksi saadaan $18,4^\circ$.

Vastaus $18,4^\circ$

210

Sijoitetaan särmiö koordinaatistoon siten, että kärki E on origossa ja kolme kärkeä positiivisilla koordinaattiakseleilla. Merkitään särmiön kärkipisteitä kuvan mukaisesti. Kysytty kulma on $\sphericalangle(\overline{AH}, \overline{AC})$.



Muodostetaan lävistäjävektorit $\overline{AH}$ ja $\overline{AC}$.

$$\overline{AH} = \overline{AE} + \overline{EH}$$

$$= -3\overline{i} + 4\overline{k}$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$= 5\overline{j} + 4\overline{k}$$

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{AH} \cdot \overline{AC} = (-3\overline{i} + 4\overline{k}) \cdot (5\overline{j} + 4\overline{k})$$

$$= (-3\overline{i} + 0\overline{j} + 4\overline{k}) \cdot (0\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k})$$

$$= -3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 4$$

$$= 16$$

$$\left|\overline{AH}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

Lasketaan lävistäjävektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{AH}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AH}\right|\left|\overline{AC}\right|} = \frac{16}{5 \cdot \sqrt{41}}$$

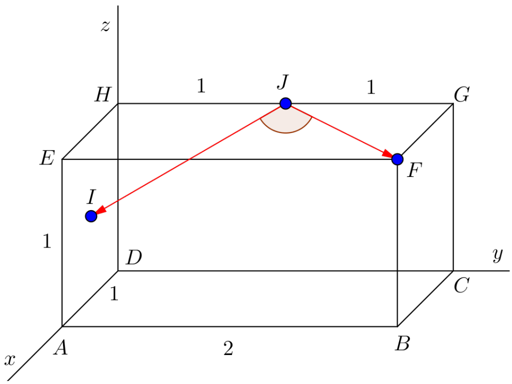
$$\sphericalangle(\overline{AH}, \overline{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{16}{5\sqrt{41}}\right) = 60{,}01...^\circ \approx 60^\circ$$

Kulman $\sphericalangle(\overline{AH}, \overline{AC})$ suuruudeksi saadaan 60°.

Vastaus $\quad 60^\circ$

211

Sijoitetaan särmiö koordinaatistoon siten, että kärki D on origossa ja kolme kärkeä positiivisilla koordinaattiakseleilla. Merkitään muita tarvittavia särmiön pisteitä kuvan mukaisesti. Kysytty kulma on $\sphericalangle(\overline{JI}, \overline{JF})$.



Muodostetaan vektorit $\overline{JI}$ ja $\overline{JF}$.

$$\begin{aligned}
\overline{JI} &= \overline{JH} + \overline{HI} \\
&= \overline{JH} + \frac{1}{2}\overline{HA} \\
&= \overline{JH} + \frac{1}{2}(\overline{HD} + \overline{DA}) \\
&= -\overline{j} + \frac{1}{2}(-\overline{k} + \overline{i}) = \frac{1}{2}\overline{i} - \overline{j} - \frac{1}{2}\overline{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{JF} &= \overline{JG} + \overline{GF} \\
&= \overline{j} + \overline{i} = \overline{i} + \overline{j}
\end{aligned}$$

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{JI}\cdot\overline{JF}=(\frac{1}{2}\overline{i}-\overline{j}-\frac{1}{2}\overline{k})\cdot(\overline{i}+\overline{j})$$

$$=(\frac{1}{2}\overline{i}-\overline{j}-\frac{1}{2}\overline{k})\cdot(\overline{i}+\overline{j}+0\overline{k})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1-1\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\left|\overline{JI}\right|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\left|\overline{JF}\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{JI},\overline{JF})=\frac{\overline{JI}\cdot\overline{JF}}{\left|\overline{JI}\right|\left|\overline{JF}\right|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\sphericalangle(\overline{JI},\overline{JF})=\cos^{-1}(-\frac{1}{2\sqrt{3}})=106,778...^\circ\approx 106,8^\circ$$

Kulman $\sphericalangle(\overline{JI},\overline{JF})$ suuruudeksi saadaan $106,8^\circ$.

Vastaus $106,8^\circ$