K1

Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r.

$$\begin{cases} 3r - s = 0 & |\cdot 4 \\ r + 4s = 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 12r - 4s = 0 \\ r + 4s = 2 \end{cases}$$

$$13r = 2$$

$$r = \frac{2}{13}$$

Sijoitetaan $r = \frac{2}{13}$ esimerkiksi yhtälöparin ylempään yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$3r - s = 0$$

$$3 \cdot \frac{2}{13} - s = 0$$

$$-s = -\frac{6}{13}$$

$$s = \frac{6}{13}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $r = \frac{2}{13}$ ja $s = \frac{6}{13}$.

Vastaus $r = \frac{2}{13}$ ja $s = \frac{6}{13}$

K2

Ratkaistaan muuttujat r ja s yhtälöryhmän

$$\begin{cases} r-7=3 \\ 4s-8=0 \\ 5s \quad =10 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä.

$$r-7=3$$
$$r=10$$

$$4s-8=0$$
$$4s=8 \quad | :4$$
$$s=2$$

Tarkastetaan sijoittamalla, toteuttaako luku $s=2$ myös kolmannen yhtälön.

$$5s=10$$
$$5\cdot 2=10$$
$$10=10$$
tosi

Siis luvut $r=10$ ja $s=2$ toteuttavat kaikki kolme yhtälöä.

Vastaus $r=10$ ja $s=2$

K3

Ratkaistaan muuttujat s ja t yhtälöryhmän

$$\begin{cases} s - t = 3 \\ 2s + t = 0 \\ 3s - 2t = 6 \end{cases}$$

kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä ja tarkastetaan, toteuttavatko luvut myös kolmannen yhtälön.

Poistetaan kahden ensimmäisen yhtälön muodostamasta yhtälöparista muuttuja t ja ratkaistaan muuttuja s.

$$+\begin{cases} s - t = 3 \\ 2s + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3s &= 3 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = 1$ esimerkiksi yhtälöparin alempaan yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja t.

$$\begin{aligned} 2s + t &= 0 \\ 2 \cdot 1 + t &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan luvut $s=1$ ja $t=-2$ yhtälöryhmän kolmanteen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3s-2t&=6 \\ 3\cdot 1-2\cdot(-2)&=6 \\ 3+4&=6 \\ 7&=6 \end{aligned}$$

epätosi

Siis luvut $s=1$ ja $t=-2$ eivät toteuta yhtälöryhmän viimeistä yhtälöä. Koska muuttujille s ja t ei löydy arvoja, jotka toteuttavat kaikki kolme yhtälöä, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus ei ratkaisua

K4

Valitaan poistettavaksi muuttujaksi t. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -r + 2s + t = -5 & (1) \\ 2r - 3s - t = 7 & (2) \\ 2r - s - t = 15 & (3) \end{cases}$$

yhtälöistä 1 ja 2 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja t.

$$+\begin{cases} -r + 2s + t = -5 \\ 2r - 3s - t = 7 \end{cases}$$
$$\overline{\quad r - s \quad = 2 \quad}$$

Muodostetaan seuraavaksi yhtälöryhmän yhtälöistä 1 ja 3 yhtälöpari ja poistetaan muuttuja t.

$$+\begin{cases} -r + 2s + t = -5 \\ 2r - s - t = 15 \end{cases}$$
$$\overline{\quad r + s \quad = 10 \quad}$$

On päädytty yhtälöpariin

$$\begin{cases} r - s = 2 \\ r + s = 10 \end{cases}$$

jossa esiintyvät vain muuttujat r ja s.

Poistetaan yhtälöparista muuttuja s ja ratkaistaan muuttuja r.

$$
+\begin{cases} r-s=2 \\ r+s=10 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
2r \quad &= 12 \\
r &= 6
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan tulos $r=6$ äskeisen yhtälöparin jälkimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan muuttuja s.

$$
\begin{aligned}
r+s &= 10 \\
6+s &= 10 \\
s &= 10-6=4
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $r=6$ ja $s=4$ esimerkiksi alkuperäisen yhtälöryhmän yhtälöön 1 ja ratkaistaan muuttuja t.

$$
\begin{aligned}
-r+2s+t &= -5 \\
-6+2\cdot 4+t &= -5 \\
-6+8+t &= -5 \\
2+t &= -5 \\
t &= -5-2=-7
\end{aligned}
$$

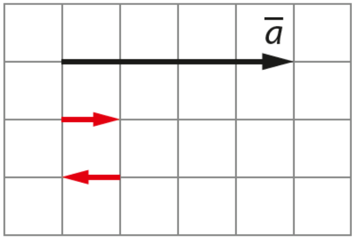
Yhtälöryhmän ratkaisu on $r=6$, $s=4$ ja $t=-7$.

Vastaus $r=6$, $s=4$ ja $t=-7$

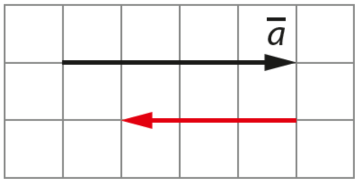
K5

Vektorin $\bar{a}$ pituus on toisaalta 12 ja toisaalta neljä ruutua. Siis yksi ruutu vastaa pituutta 3.

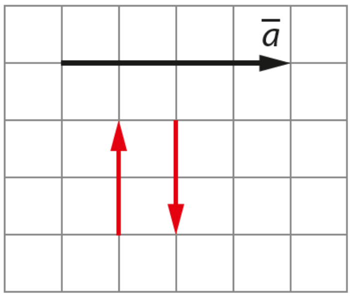
a) Kuvassa ovat vektorit, jotka ovat vektorin $\bar{a}$ kanssa yhdensuuntaiset (samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset) ja joiden pituus on 3 (eli 1 ruutu).



b) Kuvassa on vektorin $\bar{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 9 (eli 3 ruutua).

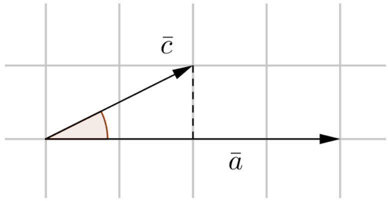


c) Kuvassa ovat vektoria $\bar{a}$ vastaan kohtisuorat vektorit, joiden pituus on 6 (eli 2 ruutua).



K6

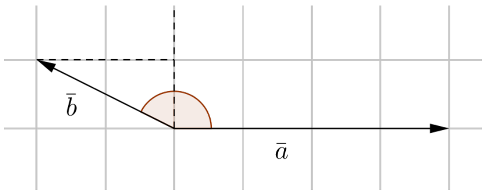
a) Siirretään vektori $\overline{c}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Trigonometrian avulla saadaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ väliselle kulmalle



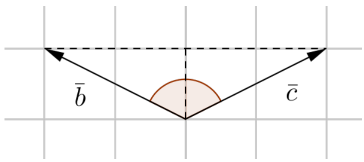
$$\tan(\sphericalangle(\overline{a},\overline{c})) = \frac{1}{2}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{c}) = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 27°$$

b) Siirretään vektori $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Nähdään, että vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma koostuu suorakulmasta ja kulmasta, jonka tangentti on 2. Siten $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = 90° + \tan^{-1} 2 \approx 153°$.



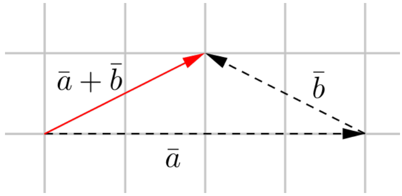
c) Vektorien $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ välinen kulma muodostuu kahdesta kulmasta, joiden molempien tangentti on 2. Siten $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) = \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 2 \approx 127°$.



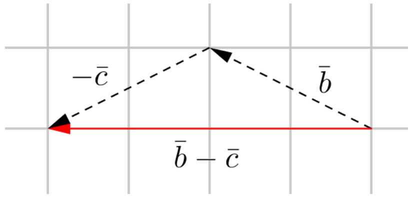
Vastaus
a) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{c}) \approx 27°$
b) $\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) \approx 153°$
c) $\sphericalangle(\overline{b},\overline{c}) \approx 127°$

K7

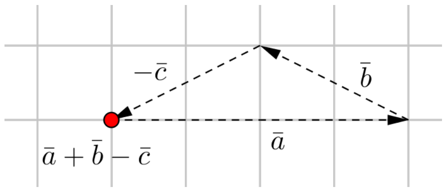
a) Asetetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{a}$:n alkupisteestä $\overline{b}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{a}+\overline{b}$.



b) Asetetaan vektorit $\overline{b}$ ja $-\overline{c}$ peräkkäin. Piirretään vektori $\overline{b}$:n alkupisteestä $-\overline{c}$:n loppupisteeseen. Saatu vektori on $\overline{b}-\overline{c}$.

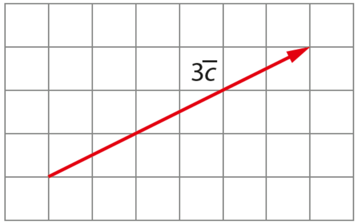


c) Asetetaan vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $-\overline{c}$ peräkkäin. Palataan samaan pisteeseen, josta lähdettiin. Siten summavektori on nollavektori: $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}=\overline{0}$.

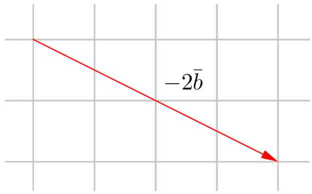


K8

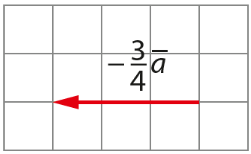
a) Vektori $3\overline{c}$ on 3 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{c}$ ja sen kanssa samansuuntainen.



b) Vektori $-2\overline{b}$ on 2 kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.

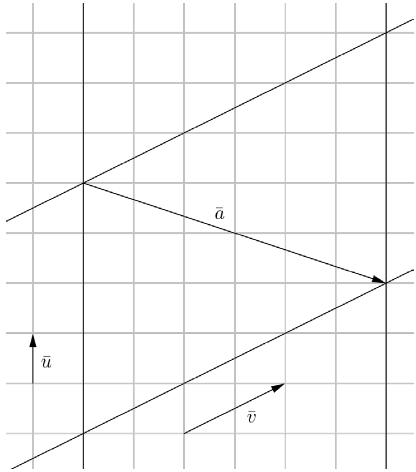


c) Vektori $-\frac{3}{4}\overline{a}$ on $\frac{3}{4}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$ (eli 3 ruutua) ja sen kanssa vastakkaissuuntainen.

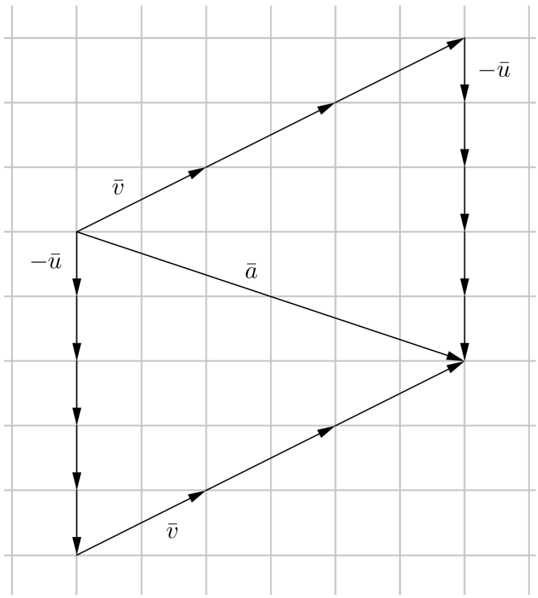


K9

Piirretään vektorin $\overline{a}$ alku- ja loppupisteen kautta vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ suuntaiset suorat.

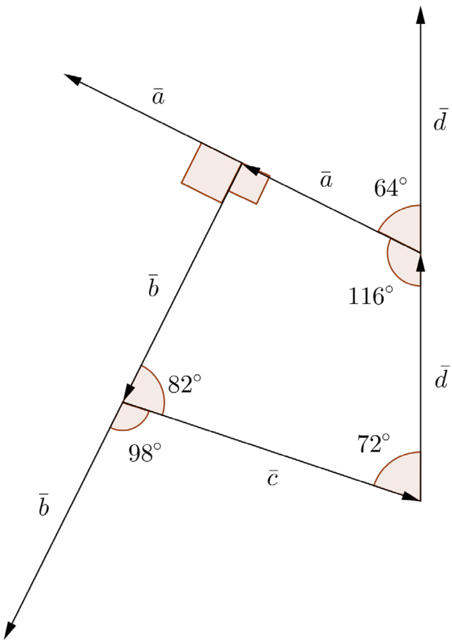


Kuvasta nähdään, että
$\overline{a} = 3\overline{v} - 5\overline{u} = -5\overline{u} + 3\overline{v}$.



Vastaus $\qquad \overline{a} = -5\overline{u} + 3\overline{v}$

K10



Kuvassa on alkuperäinen kuvio, johon on lisätty valmiiksi näkyviin vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{d}$ siirrot, joita tarvitaan seuraavissa laskuissa. Lisäksi on laskettu nelikulmion neljäs kulma: nelikulmion kulmien summa on $360°$, joten neljäs kulma on
$360° - 90° - 82° - 72° = 116°$.

a) Siirretään vektori $\overline{a}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{b}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 90° = 90°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 90°$.

b) Siirretään vektori $\overline{b}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{c}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 82° = 98°$. Siis $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = 98°$.

c) Siirretään vektori $\overline{d}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{a}$. Vektorien välinen kulma on $180° - 116° = 64°$. Siis $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{d}) = 64°$.

Vastaus

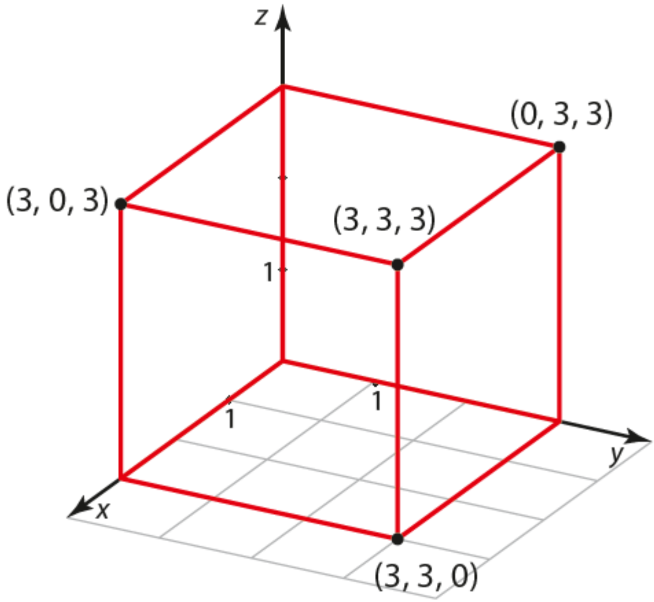
a) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = 90°$

b) $\sphericalangle(\overline{b}, \overline{c}) = 98°$

c) $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{d}) = 64°$

K11

a)



b) Kysytyt kärkipisteiden koordinaatit saadaan luettua a-kohdan kuvasta: $(3,3,0)$, $(3,0,3)$, $(0,3,3)$ ja $(3,3,3)$.

Vastaus b) $(3,3,0)$, $(3,0,3)$, $(0,3,3)$ ja $(3,3,3)$

K12

Merkitään pisteitä $A(0,5)$, $B(2,2)$ ja $C(-4,1)$.

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $A(0,5)$ paikkavektori on

$$\overline{OA} = 0\overline{i} + 5\overline{j} = 5\overline{j} .$$

b) Pisteen $B(2,2)$ paikkavektori on

$$\overline{OB} = 2\overline{i} + 2\overline{j} .$$

c) Pisteen $C(-4,1)$ paikkavektori on

$$\overline{OC} = -4\overline{i} + \overline{j} .$$

Vastaus a) $\overline{OA} = 5\overline{j}$
b) $\overline{OB} = 2\overline{i} + 2\overline{j}$
c) $\overline{OC} = -4\overline{i} + \overline{j}$

K13

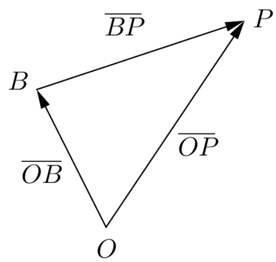
Pisteiden $A(0,-1)$, $B(1,1)$ ja $C(5,-2)$ paikkavektorit ovat $\overline{OA} = 0\overline{i} - \overline{j} = -\overline{j}$, $\overline{OB} = \overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{OC} = 5\overline{i} - 2\overline{j}$.

Paikkavektorien summa on

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} &= -\overline{j} + \overline{i} + \overline{j} + 5\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= 6\overline{i} - 2\overline{j}.\end{aligned}$$

Selvitetään sitten loppupiste P, kun lähdetään pisteestä $B(1,1)$ ja kuljetaan vektori $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 6\overline{i} - 2\overline{j}$. Merkitään tätä siirtymävektoria $\overline{BP}$.

Muodostetaan pisteen P paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OB} + \overline{BP} \\ &= \overline{i} + \overline{j} + 6\overline{i} - 2\overline{j} \\ &= 7\overline{i} - \overline{j}\end{aligned}$$

Loppupiste on siis $P = (7,-1)$.

Vastaus paikkavektorien summa $6\overline{i} - 2\overline{j}$; loppupiste $P = (7,-1)$

K14

a) Määritetään vektori $\overline{AB}$. Vektori pisteestä $A(3,-7,1)$ pisteeseen $B(-5,1,-3)$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (-5-3)\overline{i} + (1-(-7))\overline{j} + (-3-1)\overline{k} \\ &= -8\overline{i} + 8\overline{j} - 4\overline{k}\end{aligned}$$

b) Pisteiden A ja B välinen etäisyys on sama kuin vektorin $\overline{AB}$ pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

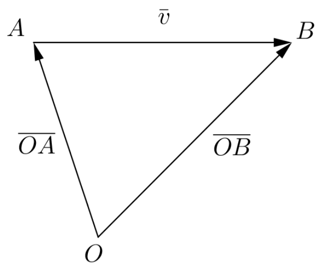
Vastaus a) $\overline{AB} = -8\overline{i} + 8\overline{j} - 4\overline{k}$
b) 12

K15

a) Merkitään alkupistettä kirjaimella A ja loppupistettä kirjaimella B. On selvitettävä loppupiste B, kun lähdetään pisteestä $A(3,-10,4)$ ja kuljetaan vektori $\overline{v} = 13\overline{i} - 8\overline{j} + 16\overline{k}$.

Pisteen $A(3,-10,4)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 3\overline{i} - 10\overline{j} + 4\overline{k}$.

Muodostetaan pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{v} \\ &= 3\overline{i} - 10\overline{j} + 4\overline{k} + 13\overline{i} - 8\overline{j} + 16\overline{k} \\ &= 16\overline{i} - 18\overline{j} + 20\overline{k}\end{aligned}$$

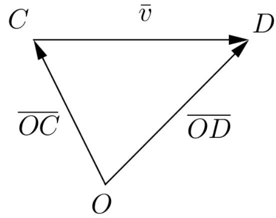
Loppupiste on siis $(16,-18,20)$.

b) Merkitään alkupistettä kirjaimella C ja loppupistettä kirjaimella D. On selvitettävä alkupiste C, kun kuljetaan vektori $\overline{v} = 13\overline{i} - 8\overline{j} + 16\overline{k}$ ja päädytään pisteeseen $D(7,-7,7)$.

Pisteen $D(7,-7,7)$ paikkavektori on $\overline{OD} = 7\overline{i} - 7\overline{j} + 7\overline{k}$.

Muodostetaan pisteen C paikkavektori.

$$
\begin{aligned}
\overline{OC} &= \overline{OD} - \overline{v} \\
&= 7\overline{i} - 7\overline{j} + 7\overline{k} - (13\overline{i} - 8\overline{j} + 16\overline{k}) \\
&= 7\overline{i} - 7\overline{j} + 7\overline{k} - 13\overline{i} + 8\overline{j} - 16\overline{k} \\
&= -6\overline{i} + \overline{j} - 9\overline{k}
\end{aligned}
$$



Alkupiste on siis $(-6,1,-9)$.

Vastaus a) $(16,-18,20)$

b) $(-6,1,-9)$

K16

Muodostetaan ensin vektori $\overline{b}-3\overline{a}$.

$$\begin{aligned}\overline{b}-3\overline{a} &= -\overline{i}+5\overline{j}-\overline{k}-3(2\overline{i}-3\overline{j}-5\overline{k}) \\ &= -\overline{i}+5\overline{j}-\overline{k}-6\overline{i}+9\overline{j}+15\overline{k} \\ &= -7\overline{i}+14\overline{j}+14\overline{k}\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{b}-3\overline{a}$ pituus on

$$\left|\overline{b}-3\overline{a}\right| = \sqrt{(-7)^2+14^2+14^2} = \sqrt{441} = 21.$$

Vastaus 21

K17

a) Lasketaan vektorin $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$ pituus.

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\begin{aligned}\overline{a}^0 &= \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{i} - \overline{j}) = \frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}.\end{aligned}$$

b) Kun yksikkövektori $\overline{a}^0$ kerrotaan luvulla $-3\sqrt{10}$, saadaan vektori, joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa vastakkaissuuntainen ja jonka pituus on $3\sqrt{10}$.

$$\begin{aligned}\overline{b} &= -3\sqrt{10} \cdot \overline{a}^0 \\ &= -3\sqrt{10} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}\right) \\ &= -9\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$

Vastaus a) $\overline{a}^0 = \frac{3}{\sqrt{10}}\overline{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\overline{j}$

b) $\overline{b} = -9\overline{i} + 3\overline{j}$

K18

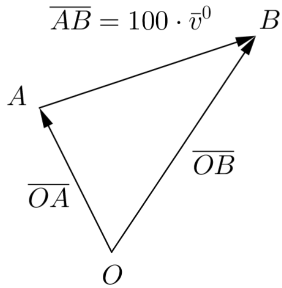
Lähtöpiste on $A(-14,10)$. Merkitään loppupistettä kirjaimella B.

Vektorin $\overline{v} = 7\overline{i} - 24\overline{j}$ pituus on $|\overline{v}| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{625} = 25$.

Vektorin $\overline{v}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\begin{aligned}\overline{v}^0 &= \frac{1}{|\overline{v}|} \cdot \overline{v} \\ &= \frac{1}{25}(7\overline{i} - 24\overline{j}) = \frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}.\end{aligned}$$

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ &= \overline{OA} + 100 \cdot \overline{v}^0 \\ &= -14\overline{i} + 10\overline{j} + 100 \cdot (\frac{7}{25}\overline{i} - \frac{24}{25}\overline{j}) \\ &= -14\overline{i} + 10\overline{j} + 28\overline{i} - 96\overline{j} \\ &= 14\overline{i} - 86\overline{j}\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $B = (14, -86)$.

Vastaus pisteeseen $(14, -86)$

K19

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\begin{aligned} \overline{a} &= r\overline{b} \\ t\overline{i} - 2\overline{j} &= r(-2\overline{i} + 4t\overline{j}) \\ t\overline{i} - 2\overline{j} &= -2r\overline{i} + 4rt\overline{j} \end{aligned}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} t = -2r \\ -2 = 4rt \end{cases}$$

Yhtälöparille saadaan laskimella ratkaisut $r = -\dfrac{1}{2}$ ja $t = 1$ sekä $r = \dfrac{1}{2}$ ja $t = -1$.

Kun $t = 1$, vektorit ovat $\overline{a} = t\overline{i} - 2\overline{j} = \overline{i} - 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + 4t\overline{j} = -2\overline{i} + 4\overline{j}$. Koska tällöin $\overline{a} = r\overline{b} = -\dfrac{1}{2}\overline{b}$ ja $-\dfrac{1}{2} < 0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Kun $t = -1$, vektorit ovat $\overline{a} = t\overline{i} - 2\overline{j} = -\overline{i} - 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + 4t\overline{j} = -2\overline{i} - 4\overline{j}$. Koska tällöin $\overline{a} = r\overline{b} = \dfrac{1}{2}\overline{b}$ ja $\dfrac{1}{2} > 0$, niin vektorit ovat samansuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t = 1$ tai $t = -1$.
Arvolla $t = 1$ vektorit ovat vastakkaissuuntaiset,
arvolla $t = -1$ samansuuntaiset.

K20

Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{u} = r\overline{v}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{u} = r\overline{v}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\begin{aligned} \overline{u} &= r\overline{v} \\ \overline{i} + t\overline{j} + 3\overline{k} &= r(t\overline{i} + 3\overline{j} - (t-4)\overline{k}) \\ \overline{i} + t\overline{j} + 3\overline{k} &= rt\overline{i} + 3r\overline{j} - r(t-4)\overline{k} \end{aligned}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 1 = rt \\ t = 3r \\ 3 = -r(t-4) \end{cases}$$

Laskimella nähdään, että yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. Siten vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ eivät ole yhdensuuntaiset millään vakion t arvolla.

Vastaus eivät ole

K21

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että

$$-6\overline{i} - \overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(2\overline{i} + \overline{j}).$$

Muokataan yhtälöä.

$$-6\overline{i} - \overline{j} = r(\overline{i} - 2\overline{j}) + s(2\overline{i} + \overline{j})$$
$$-6\overline{i} - \overline{j} = r\overline{i} - 2r\overline{j} + 2s\overline{i} + s\overline{j}$$
$$-6\overline{i} - \overline{j} = (r + 2s)\overline{i} + (-2r + s)\overline{j}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} -6 = r + 2s \\ -1 = -2r + s \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan laskimella $r = -\frac{4}{5}$ ja $s = -\frac{13}{5}$.

Siis

$$-6\overline{i} - \overline{j} = r\overline{a} + s\overline{b} = -\frac{4}{5}\overline{a} - \frac{13}{5}\overline{b}.$$

Vastaus $\quad -6\overline{i} - \overline{j} = -\frac{4}{5}\overline{a} - \frac{13}{5}\overline{b}$

K22

Muodostetaan yhtälö $\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$ ja ratkaistaan kertoimet r, s ja t.

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} \\
25\overline{i} + 40\overline{j} - 15\overline{k} &= r(\overline{i} + 2\overline{j}) + s(\overline{i} + \overline{k}) + t(\overline{j} - 3\overline{k}) \\
25\overline{i} + 40\overline{j} - 15\overline{k} &= r\overline{i} + 2r\overline{j} + s\overline{i} + s\overline{k} + t\overline{j} - 3t\overline{k} \\
25\overline{i} + 40\overline{j} - 15\overline{k} &= r\overline{i} + s\overline{i} + 2r\overline{j} + t\overline{j} + s\overline{k} - 3t\overline{k} \\
25\overline{i} + 40\overline{j} - 15\overline{k} &= (r+s)\overline{i} + (2r+t)\overline{j} + (s-3t)\overline{k}
\end{aligned}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases}
25 = r + s \\
40 = 2r + t \\
-15 = s - 3t
\end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan laskimella $r = 16$, $s = 9$ ja $t = 8$.

Siis

$$\overline{v} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c} = 16\overline{a} + 9\overline{b} + 8\overline{c}\,.$$

Vastaus $\quad \overline{v} = 16\overline{a} + 9\overline{b} + 8\overline{c}$

K23

Vektorin $\overline{a} = 24\overline{i} - 13t\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{a}| = \sqrt{24^2 + (-13t)^2} = \sqrt{576 + 169t^2}.$$

Vektorin $\overline{b} = 12t\overline{i} - 25\overline{j}$ pituuden lauseke on

$$|\overline{b}| = \sqrt{(12t)^2 + (-25)^2} = \sqrt{144t^2 + 625}.$$

Muodostetaan yhtälö $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ ja ratkaistaan vakion t arvo laskimella.

$$\sqrt{576 + 169t^2} = \sqrt{144t^2 + 625}$$

$$t = \frac{7}{5} \quad \text{tai} \quad t = -\frac{7}{5}$$

Siis vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä pitkät, kun $t = \frac{7}{5}$ tai $t = -\frac{7}{5}$.

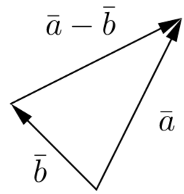
Vastaus $\quad t = \frac{7}{5}$ tai $t = -\frac{7}{5}$

K24

Kolmio on suorakulmainen, jos jokin sen kulmista on suora.

Tarkastellaan vektoreita, jotka määräävät kolmion sivut. Kolmion sivut määräytyvät vektoreista $\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j}$, $\overline{b} = 13\overline{i} + \overline{j}$ ja näiden erotusvektorista

$$\begin{aligned}\overline{a} - \overline{b} &= 3\overline{i} - 5\overline{j} - (13\overline{i} + \overline{j}) \\ &= 3\overline{i} - 5\overline{j} - 13\overline{i} - \overline{j} \\ &= -10\overline{i} - 6\overline{j}.\end{aligned}$$



Kolmion kulma on suora, jos kulmasta lähtevät tai siihen tulevat sivuvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli jos niiden pistetulo on nolla.

Lasketaan sivuvektorien pistetulot.

Ensimmäinen kulma:

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (3\overline{i} - 5\overline{j}) \cdot (13\overline{i} + \overline{j}) \\ &= 3 \cdot 13 - 5 \cdot 1 = 34\end{aligned}$$

Toinen kulma:

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot (\overline{a} - \overline{b}) &= (3\overline{i} - 5\overline{j}) \cdot (-10\overline{i} - 6\overline{j}) \\ &= 3 \cdot (-10) - 5 \cdot (-6) = 0\end{aligned}$$

Huomataan, että kolmiossa on suora kulma, joten kolmio on suorakulmainen. (Koska löydettiin suora kulma, kolmannen vektoriparin pistetuloa ei tarvitse laskea.)

Vastaus on

K25

Pisteiden $A(5,2)$ ja $B(19,-5)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (19-5)\overline{i} + (-5-2)\overline{j} \\ &= 14\overline{i} - 7\overline{j}.\end{aligned}$$

Piste P jakaa janan AB suhteessa 1 : 6. Yhteensä jakovälejä on siis 1 + 6 = 7, ja pisteeseen P päästään pisteestä A kulkemalla $\frac{1}{7}$ vektorista $\overline{AB}$. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + \frac{1}{7}\overline{AB} \\ &= 5\overline{i} + 2\overline{j} + \frac{1}{7}(14\overline{i} - 7\overline{j}) \\ &= 5\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{i} - \overline{j} \\ &= 7\overline{i} + \overline{j}\end{aligned}$$

Siis piste P on $(7,1)$.

Vastaus (7,1)

K26

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (-6\overline{i}+2\overline{j})\cdot(-4\overline{i}-9\overline{j})\\ &= -6\cdot(-4)+2\cdot(-9)\\ &= 24-18\\ &= 6\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}\neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= (\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k})\cdot(-\overline{i}-\overline{j}-3\overline{k})\\ &= 1\cdot(-1)+2\cdot(-1)-1\cdot(-3)\\ &= -1-2+3\\ &= 0\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus a) $\overline{a}\cdot\overline{b}=6$, eivät ole kohtisuorassa
b) $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, ovat kohtisuorassa

K27

a) Kolmio on suorakulmainen, jos jokin sen kulmista on suora.

Merkitään kärkipisteitä $A(-2,3,1)$, $B(4,1,-1)$ ja $C(-1,7,2)$. Muodostetaan vektorit, jotka määräävät kolmion ABC sivut.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (4-(-2))\overline{i} + (1-3)\overline{j} + (-1-1)\overline{k} \\ &= 6\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (-1-(-2))\overline{i} + (7-3)\overline{j} + (2-1)\overline{k} \\ &= \overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (-1-4)\overline{i} + (7-1)\overline{j} + (2-(-1))\overline{k} \\ &= -5\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k}\end{aligned}$$

Lasketaan sivuvektorien pistetulot.

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= (6\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}) \\ &= 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{BC} &= (6\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k}) \cdot (-5\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= 6 \cdot (-5) - 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = -48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} \cdot \overline{BC} &= (\overline{i} + 4\overline{j} + \overline{k}) \cdot (-5\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= 1 \cdot (-5) + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 22\end{aligned}$$

Yksikään pistetuloista ei ole nolla, joten kolmion mikään kulma ei ole suora. Siten kolmio ei ole suorakulmainen.

b) Kolmio on suorakulmainen, jos jokin sen kulmista on suora.

Merkitään kärkipisteitä $A(-1,3,0)$, $B(2,-1,1)$ ja $C(0,6,9)$. Muodostetaan vektorit, jotka määräävät kolmion ABC sivut.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2-(-1))\overline{i} + (-1-3)\overline{j} + (1-0)\overline{k} \\ &= 3\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (0-(-1))\overline{i} + (6-3)\overline{j} + (9-0)\overline{k} \\ &= \overline{i} + 3\overline{j} + 9\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (0-2)\overline{i} + (6-(-1))\overline{j} + (9-1)\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + 7\overline{j} + 8\overline{k}\end{aligned}$$

Lasketaan sivuvektorien pistetulot.

$$\begin{aligned}\overline{AB}\cdot\overline{AC} &= (3\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k})\cdot(\overline{i} + 3\overline{j} + 9\overline{k}) \\ &= 3\cdot 1 - 4\cdot 3 + 1\cdot 9 = 0\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 0$, niin sivut AB ja AC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Siten kolmio on suorakulmainen.

(Koska suorakulma löydettiin heti, muiden sivuvektorien pistetuloja ei tarvitse laskea.)

Vastaus a) ei ole
b) on

K28

Lasketaan pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k})\cdot(-\overline{i} + 2\overline{j} + 7\overline{k})$$
$$= 2\cdot(-1) - 3\cdot 2 - 4\cdot 7 = -36$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Lasketaan vektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a},\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{-36}{\sqrt{29}\cdot 3\sqrt{6}} = \frac{-12}{\sqrt{174}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a},\overline{b}) = \cos^{-1}\left(-\frac{12}{\sqrt{174}}\right) = 155,46...^\circ \approx 155^\circ$$

Vastaus 155°

K29

Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Muodostetaan kolmion sivuja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.

Sivu AB:

$$\overline{AB} = (0-(-3))\overline{i} + (4-(-1))\overline{j} = 3\overline{i} + 5\overline{j}$$
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} \approx 5,8$$

Sivu AC:

$$\overline{AC} = (3-(-3))\overline{i} + (2-(-1))\overline{j} = 6\overline{i} + 3\overline{j}$$
$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6,7$$

Sivu BC:

$$\overline{BC} = (3-0)\overline{i} + (2-4)\overline{j} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$$
$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3,6$$

Kolmion pisin sivu on AC, joten kolmion suurin kulma on $\sphericalangle B = \sphericalangle(-\overline{AB}, \overline{BC})$.

Lasketaan pistetulo ja vektorien välinen kulma.

$$
\begin{aligned}
-\overline{AB}\cdot\overline{BC} &= (-3\overline{i}-5\overline{j})\cdot(3\overline{i}-2\overline{j}) \\
&= -3\cdot 3-5\cdot(-2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$\cos(-\overline{AB},\overline{BC}) = \frac{-\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|-\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{442}}$$

$$\sphericalangle(-\overline{AB},\overline{BC}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{442}}\right) = 87{,}27...^\circ \approx 87^\circ$$

Kolmion suurin kulma on 87°.

Vastaus $\quad 87^\circ$

K30

Määritetään ensin suunnikkaan sivuvektorien $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ välinen kulma. Lasketaan vektorien pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}) \cdot (-\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}) \\ &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Lasketaan sivuvektorien välinen kulma.

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{5}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{11}}$$

$$\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{21}\sqrt{11}}\right) = 70,79...° \approx 71°$$

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Vierekkäiset kulmat ovat toistensa vieruskulmat, joten lasketun kulman vierekkäiset kulmat ovat suuruudeltaan $180° - 71° = 109°$. Kaiken kaikkiaan suunnikkaan kulmat ovat siis $71°$, $109°$, $71°$ ja $109°$.

Vastaus $71°$, $109°$, $71°$ ja $109°$

K31

Lasketaan ensin vektorin $2\overline{a}-5\overline{b}$ pituuden neliö $\left|2\overline{a}-5\overline{b}\right|^2$.

$$\begin{aligned}
&\left|2\overline{a}-5\overline{b}\right|^2\\
&=(2\overline{a}-5\overline{b})\cdot(2\overline{a}-5\overline{b})\\
&=2\overline{a}\cdot 2\overline{a}+2\overline{a}\cdot(-5\overline{b})-5\overline{b}\cdot 2\overline{a}-5\overline{b}\cdot(-5\overline{b})\\
&=4\overline{a}\cdot\overline{a}-10\overline{a}\cdot\overline{b}-10\overline{a}\cdot\overline{b}+25\overline{b}\cdot\overline{b}\\
&=4\left|\overline{a}\right|^2-20\overline{a}\cdot\overline{b}+25\left|\overline{b}\right|^2\\
&=4\cdot 5^2-20\cdot 10+25\cdot 4^2\\
&=300
\end{aligned}$$

(Laskussa käytettiin tietoja $\left|\overline{a}\right|=5$, $\left|\overline{b}\right|=4$ ja $\overline{a}\cdot\overline{b}=10$.)

Vektorin $2\overline{a}-5\overline{b}$ pituus on

$$\left|2\overline{a}-5\overline{b}\right|=\sqrt{300}=10\sqrt{3}.$$

Vastaus $\quad 10\sqrt{3}$

K32

Määritetään pistetulon $\overline{a} \cdot \overline{b}$ arvo. Tarkastellaan ensin neliötä $\left|2\overline{a} + \overline{b}\right|^2$.

$$
\begin{aligned}
\left|2\overline{a} + \overline{b}\right|^2 &= (2\overline{a} + \overline{b}) \cdot (2\overline{a} + \overline{b}) \\
&= 2\overline{a} \cdot 2\overline{a} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot 2\overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= 4\overline{a} \cdot \overline{a} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= 4\left|\overline{a}\right|^2 + 4\overline{a} \cdot \overline{b} + \left|\overline{b}\right|^2
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan yhtälöstä pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$
\begin{aligned}
\left|2\overline{a} + \overline{b}\right|^2 &= 4\left|\overline{a}\right|^2 + 4\overline{a} \cdot \overline{b} + \left|\overline{b}\right|^2 \\
-4\overline{a} \cdot \overline{b} &= 4\left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2 - \left|2\overline{a} + \overline{b}\right|^2 \\
&= 4 \cdot 6^2 + 5^2 - 13^2 = 0 \\
\overline{a} \cdot \overline{b} &= 0
\end{aligned}
$$

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$ on nolla, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus ovat

K33

Käytetään laskuissa tietoa $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a)

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= 7\cdot 4\cdot\cos 150°\\ &= 28\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -14\sqrt{3}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}-3\overline{a}\cdot 5\overline{b} &= (-3\cdot 5)(\overline{a}\cdot\overline{b}) = -15(\overline{a}\cdot\overline{b})\\ &= -15\cdot|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= -15\cdot 7\cdot 4\cdot\cos 150°\\ &= -420\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 210\sqrt{3}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}2\overline{a}\cdot(\overline{a}-3\overline{b}) &= 2\overline{a}\cdot\overline{a} + 2\overline{a}\cdot(-3\overline{b})\\ &= 2|\overline{a}|^2 + (2\cdot(-3))(\overline{a}\cdot\overline{b})\\ &= 2\cdot 7^2 - 6\cdot|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= 98 - 6\cdot 7\cdot 4\cdot\cos 150°\\ &= 98 - 168\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= 98 + 84\sqrt{3}\end{aligned}$$

Vastaus a) $-14\sqrt{3}$ b) $210\sqrt{3}$ c) $98+84\sqrt{3}$

K34

Lasketaan ensin vektorien $\overline{a} = t\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j}$ pistetulo ja vektorien pituudet.

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot \overline{b} &= (t\overline{i} + 2\overline{j}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j}) \\ &= t \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ &= t + 6\end{aligned}$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{t^2 + 2^2} = \sqrt{t^2 + 4}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Jos vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $45°$, kulman kosini on $\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a}, \overline{b})$$

$$t + 6 = \sqrt{t^2 + 4} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = -1 \quad \text{tai} \quad t = 4$$

Vastaus $\quad t = -1$ tai $t = 4$

K35

a) Merkitään pistettä $(1,2,-1)$ kirjaimella A. Paikkavektorin $\overline{OA}$ lauseke on

$$\overline{OA} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}\ .$$

Suoran suuntavektori on $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, joten suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k} + t(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}),$$

missä t on reaaliluku.

b) Pisteen $(1,2,-1)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + 2t \\ y = \ \ 2 - \ t \\ z = -1 + \ t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Vastaus a) $\overline{OP} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k} + t(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k})$, missä t on reaaliluku.

b) $\begin{cases} x = \ \ 1 + 2t \\ y = \ \ 2 - \ t, \\ z = -1 + \ t \end{cases}$ missä t on reaaliluku.

K36

Määritetään ensin suoran vektoriyhtälö. Paikkavektorin $\overline{OA}$ lauseke on

$$\overline{OA} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}\ .$$

Suoran suuntavektori on $\overline{v} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, joten suoran vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{v} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + t(-\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}),$$

missä t on reaaliluku.

Suoralla oleva piste saadaan määritettyä, kun suoran vektoriyhtälössä luvulle t valitaan jokin arvo. Voidaan valita esimerkiksi $t = 1$ ja $t = 2$.

Kun $t = 1$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + 1\cdot(-\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k})\\ &= \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} - \overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}\\ &= 0\overline{i} + 0\overline{j} + 5\overline{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(0,0,5)$.

Kun $t = 2$,

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} + 2 \cdot (-\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k} - 2\overline{i} + 2\overline{j} + 6\overline{k} \\ &= -\overline{i} + \overline{j} + 8\overline{k}.\end{aligned}$$

Saadaan piste $(-1,1,8)$.

Vastaus esimerkiksi $(0,0,5)$ ja $(-1,1,8)$

K37

Määritetään ensin suoran parametriesitys.

Pisteen $(-3,5,0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{v} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 5 + t \\ z = 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Suoran ja yz-tason leikkauspisteen x-koordinaatti on nolla, joten leikkauspiste on muotoa $(0, y, z)$. Ratkaistaan parametri t.

$$\begin{aligned} x &= -3 - t \\ 0 &= -3 - t \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Lasketaan leikkauspisteen y- ja z-koordinaatit.

$$\begin{aligned} y &= 5 + t = 5 - 3 = 2 \\ z &= 3t = 3 \cdot (-3) = -9 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0,2,-9)$.

Vastaus $(0,2,-9)$

K38

Muodostetaan pisteiden $A(3,-3,6)$ ja $B(8,-8,16)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (8-3)\overline{i} + (-8-(-3))\overline{j} + (16-6)\overline{k} \\ &= 5\overline{i} - 5\overline{j} + 10\overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -3 - 5t \\ z = 6 + 10t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(15,5,-5)$ ja $D(12,4,-4)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= (12-15)\overline{i} + (4-5)\overline{j} + (-4-(-5))\overline{k} \\ &= -3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 15 - 3s \\ y = 5 - s \\ z = -5 + s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Suoran leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 3+5t=15-3s \\ -3-5t=5-s \\ 6+10t=-5+s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $t=-\frac{3}{5}$ ja $s=5$.

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $s=5$ suoran CD parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=15-3s=15-3\cdot 5=0 \\ y=5-s=5-5=0 \\ z=-5+s=-5+5=0 \end{cases}$$

Leikkauspiste on origo $(0,0,0)$.

Vastaus $(0,0,0)$

K39

Suoran $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \quad\; 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat luettavissa parametrin t kertoimista, joten (yhdeksi) suuntavektoriksi saadaan $\overline{u} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$.

Vastaavasti suoran $\begin{cases} x = 3 - s \\ y = 2 \\ z = 1 + 3s \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat luettavissa parametrin s kertoimista, joten suuntavektoriksi saadaan $\overline{v} = -\overline{i} + 3\overline{k}$.

Lasketaan suuntavektorien pituudet ja pistetulo.

$$|\overline{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overline{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \overline{u} \cdot \overline{v} &= (2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}) \cdot (-\overline{i} + 0\overline{j} + 3\overline{k}) \\ &= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lasketaan suuntavektorien välisen kulman suuruus.

$$\cos(\overline{u},\overline{v}) = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}||\overline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{35}}$$

$$\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = \cos^{-1}(\frac{1}{2\sqrt{35}}) = 85{,}15...^\circ \approx 85^\circ$$

Koska saatu suuntavektorien välinen kulma on terävä, kysytty suorien välinen kulma on myös 85°.

Vastaus $\quad 85^\circ$

K40

a) Pisteen $A(4,-3,5)$ paikkavektori on $\overline{OA} = 4\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$.
Pisteen A kautta kulkevan tason suuntavektorit ovat
$\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 6\overline{j} - 8\overline{k}$. Tason vektoriyhtälöksi saadaan

$$\overline{OP} = \overline{OA} + s\overline{u} + t\overline{v} = 4\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k} + s(2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}) + t(-3\overline{i} + 6\overline{j} - 8\overline{k}),$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) Taso sisältää pisteen $A(4,-3,5)$ ja sillä on suuntavektorit
$\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 6\overline{j} - 8\overline{k}$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 4 + 2s - 3t \\ y = -3 - s + 6t \\ z = 5 + 5s - 8t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Vastaus a)
$\overline{OP} = 4\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k} + s(2\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}) + t(-3\overline{i} + 6\overline{j} - 8\overline{k}),$
missä s ja t ovat reaalilukuja.

b) $\begin{cases} x = 4 + 2s - 3t \\ y = -3 - s + 6t, \\ z = 5 + 5s - 8t \end{cases}$ missä s ja t ovat reaalilukuja.

K41

a) Suoran $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = \ \ 2 - 3t \\ z = \ \ 3 + \ t \end{cases}$ suuntavektorin komponentit ovat

luettavissa parametrin t kertoimista, joten (yhdeksi) suuntavektoriksi saadaan $4\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$. Koska taso on kohtisuorassa suoraa vastaan, kyseinen suuntavektori voidaan valita tason normaalivektoriksi.

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\,,$$

missä nyt pisteen A koordinaatit $x_0 = 4$, $y_0 = -3$ ja $z_0 = -1$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = 4$, $b = -3$ ja $c = 1$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ 4 \cdot (x - 4) - 3 \cdot (y - (-3)) + 1 \cdot (z - (-1)) &= 0 \\ 4x - 16 - 3y - 9 + z + 1 &= 0 \\ 4x - 3y + z - 24 &= 0 \end{aligned}$$

b) Tason ja y-akselin leikkauspiste on muotoa $(0, y, 0)$. Sijoitetaan pisteen koordinaatit tason yhtälöön ja lasketaan y-koordinaatin arvo.

$$
\begin{aligned}
4x-3y+z-24&=0\\
4\cdot 0-3y+0-24&=0\\
-3y&=24\\
y&=-8
\end{aligned}
$$

Leikkauspiste on $(0,-8,0)$.

Vastaus a) $4x-3y+z-24=0$
b) $(0,-8,0)$

K42

Pisteen $(6,-2,-8)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori on $\overline{u}=-2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 6-2r \\ y = -2+r \\ z = -8+3r, \end{cases}$$

missä r on reaaliluku.

Määritetään suoran ja tason $\begin{cases} x = 2+s+2t \\ y = -1+s+t \\ z = 1+3t \end{cases}$ leikkauspiste. Suoran ja tason leikkauspisteen (x,y,z) koordinaatit toteuttavat sekä tason että suoran parametriesityksen. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 6-2r = 2+s+2t \\ -2+r = -1+s+t \\ -8+3r = 1+3t \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r=2$, $s=2$ ja $t=-1$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla arvo $r = 2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 6 - 2r = 6 - 2 \cdot 2 = 2 \\ y = -2 + r = -2 + 2 = 0 \\ z = -8 + 3r = -8 + 3 \cdot 2 = -2 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(2, 0, -2)$.

Vastaus $(2, 0, -2)$

K43

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.
Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2-1)\overline{i} + (0-(-1))\overline{j} + (1-2)\overline{k} \\ &= \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (-1-1)\overline{i} + (2-(-1))\overline{j} + (3-2)\overline{k} \\ &= -2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

Taso sisältää pisteen $A(1,-1,2)$ ja sillä on suuntavektorit $\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ ja $-2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2t \\ y = -1 + s + 3t \\ z = 2 - s + t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Tason ja y-akselin leikkauspiste on muotoa $(0, y, 0)$. Määritetään parametrien s ja t arvot sijoittamalla parametriesityksen ensimmäiseen ja viimeiseen yhtälöön $x = 0$ ja $z = 0$ ja ratkaisemalla yhtälöpari laskimella.

$$\begin{cases} 0 = 1 + s - 2t \\ 0 = 2 - s + t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s = 5$ ja $t = 3$.

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti parametriesityksen keskimmäisen yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} y &= -1 + s + 3t \\ &= -1 + 5 + 3 \cdot 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $(0,13,0)$.

Vastaus $(0,13,0)$

K44

Merkitään kysyttyä tasoa kirjaimella T.

Koska taso T ja taso $2x - y + 4z - 1 = 0$ ovat yhdensuuntaiset, myös niiden normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset.

Muuttujien kertoimista voidaan lukea, että yksi tason $2x - y + 4z - 1 = 0$ normaalivektori on $2\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$. Kyseinen vektori voidaan valita myös tason T normaalivektoriksi.

Tason yhtälön koordinaattiyhtälö on muotoa

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

missä nyt tason sisältämän pisteen koordinaatit $x_0 = 8$, $y_0 = -5$ ja $z_0 = 7$ sekä normaalivektorin kertoimet $a = 2$, $b = -1$ ja $c = 4$.

Sijoitetaan koordinaatit ja kertoimet ja sievennetään koordinaattiyhtälö normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ 2 \cdot (x - 8) - 1 \cdot (y - (-5)) + 4 \cdot (z - 7) &= 0 \\ 2x - 16 - y - 5 + 4z - 28 &= 0 \\ 2x - y + 4z - 49 &= 0 \end{aligned}$$

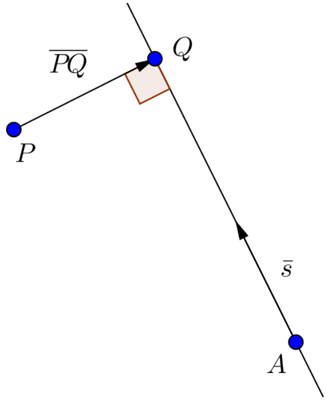
Tason T yhtälö on siis $2x - y + 4z - 49 = 0$.

Vastaus $\quad 2x - y + 4z - 49 = 0$

K45

a) Merkitään suoran pistettä $(9,-3,4)$ kirjaimella A ja suoran suuntavektoria $3\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$ kirjaimella $\overline{s}$.

Olkoon Q se suoran piste, joka on lähimpänä pistettä $P(1,0,2)$.
Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan.



Suoran suuntavektori on $\overline{s}=3\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$ ja suora kulkee pisteen $A(9,-3,4)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 9+3t \\ y = -3-2t \\ z = 4+2t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$Q=(9+3t,-3-2t,4+2t)$.

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (9+3t-1)\overline{i}+(-3-2t-0)\overline{j}+(4+2t-2)\overline{k} \\ &= (8+3t)\overline{i}+(-3-2t)\overline{j}+(2+2t)\overline{k} \end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa suoraa vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{s}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}
\overline{PQ}\cdot\overline{s} &= 0 \\
((8+3t)\overline{i}+(-3-2t)\overline{j}+(2+2t)\overline{k})\cdot(3\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}) &= 0 \\
(8+3t)\cdot 3+(-3-2t)\cdot(-2)+(2+2t)\cdot 2 &= 0 \\
17t+34 &= 0 \\
t &= -2
\end{aligned}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t=-2$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases}
x = 9+3t = 9+3\cdot(-2) = 3 \\
y = -3-2t = -3-2\cdot(-2) = 1 \\
z = 4+2t = 4+2\cdot(-2) = 0
\end{cases}$$

Siten piste $(3,1,0)$ on suoran pisteistä lähimpänä pistettä P.

b) Pisteen P etäisyys suorasta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\overline{PQ} = (3-1)\overline{i}+(1-0)\overline{j}+(0-2)\overline{k} = 2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Pisteen P etäisyys suorasta on 3.

Vastaus a) $(3,1,0)$ b) 3

K46

a) Olkoon Q se tason piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (3-4)\overline{i} + (5-(-2))\overline{j} + (5-0)\overline{k} \\ &= -\overline{i} + 7\overline{j} + 5\overline{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (-1-4)\overline{i} + (3-(-2))\overline{j} + (1-0)\overline{k} \\ &= -5\overline{i} + 5\overline{j} + \overline{k}\end{aligned}$$

Taso sisältää pisteen $A(4,-2,0)$ ja sillä on edellä lasketut suuntavektorit, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 4 - s - 5t \\ y = -2 + 7s + 5t \\ z = 5s + t, \end{cases}$$

missä s ja t ovat reaalilukuja.

Piste Q on tasossa, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat tason parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (4-s-5t, -2+7s+5t, 5s+t).$$

Muodostetaan vektorin $\overline{PQ}$ lauseke.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= (4-s-5t-2)\overline{i}+(-2+7s+5t-(-3))\overline{j}+(5s+t-8)\overline{k}\\ &= (2-s-5t)\overline{i}+(1+7s+5t)\overline{j}+(-8+5s+t)\overline{k}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{PQ}$ on kohtisuorassa tasoa vastaan, niin se on kohtisuorassa tason molempia suuntavektoreita
$\overline{AB}=-\overline{i}+7\overline{j}+5\overline{k}$ ja $\overline{AC}=-5\overline{i}+5\overline{j}+\overline{k}$ vastaan.
Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan parametrien s ja t arvot laskimella.

$$\begin{cases}\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=0\\ \overline{PQ}\cdot\overline{AC}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}((2-s-5t)\overline{i}+(1+7s+5t)\overline{j}+(-8+5s+t)\overline{k})\cdot(-\overline{i}+7\overline{j}+5\overline{k})=0\\ ((2-s-5t)\overline{i}+(1+7s+5t)\overline{j}+(-8+5s+t)\overline{k})\cdot(-5\overline{i}+5\overline{j}+\overline{k})=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2-s-5t)\cdot(-1)+(1+7s+5t)\cdot 7+(-8+5s+t)\cdot 5=0\\ (2-s-5t)\cdot(-5)+(1+7s+5t)\cdot 5+(-8+5s+t)\cdot 1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}75s+45t-35=0\\ 45s+51t-13=0\end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $s=\dfrac{2}{3}$ ja $t=-\dfrac{1}{3}$.

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saadut parametrien arvot $s = \frac{2}{3}$ ja $t = -\frac{1}{3}$ tason parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 4 - s - 5t = 4 - \frac{2}{3} - 5 \cdot (-\frac{1}{3}) = 5 \\ y = -2 + 7s + 5t = -2 + 7 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot (-\frac{1}{3}) = 1 \\ z = 5s + t = 5 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 3 \end{cases}$$

Saadaan piste $(5,1,3)$.

b) Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (5-2)\overline{i} + (1-(-3))\overline{j} + (3-8)\overline{k} \\ &= 3\overline{i} + 4\overline{j} - 5\overline{k} \end{aligned}$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Pisteen P etäisyys tasosta on $5\sqrt{2}$.

Vastaus a) $(5,1,3)$
b) $5\sqrt{2}$

K47

Olkoon vektorien $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} - 3\overline{j}$ alkupiste origo. Tällöin kolmion kärjet ovat pisteissä $O(0,0)$, $A(1,1)$ ja $B(-2,-3)$.

On laskettava origosta piirretyn korkeusjanan pituus eli origon etäisyys pisteiden A ja B kautta kulkevasta suorasta.

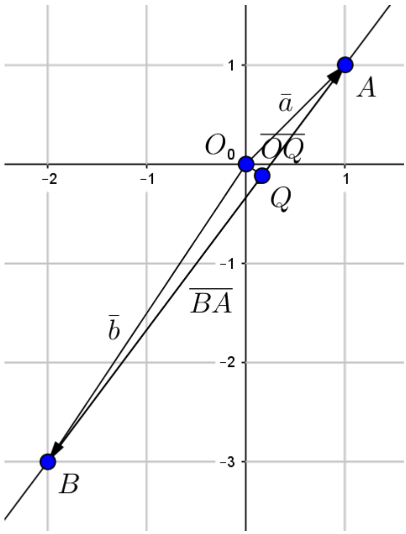
Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{BA}$.

$$\begin{aligned}\overline{BA} &= (1-(-2))\overline{i} + (1-(-3))\overline{j} \\ &= 3\overline{i} + 4\overline{j}\end{aligned}$$

Suoran suuntavektori on $\overline{BA} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$ ja suora kulkee pisteen $A(1,1)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.



Olkoon Q se suoran AB piste, joka on lähimpänä origoa O. Tällöin vektori $\overline{OQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan.

Piste Q on suoralla, joten pisteen Q koordinaatit toteuttavat suoran parametriesityksen ja voidaan merkitä

$$Q = (1+3t, 1+4t).$$

Pisteen Q paikkavektori $\overline{OQ}$ on

$$\overline{OQ} = (1+3t)\overline{i} + (1+4t)\overline{j}.$$

Koska vektori $\overline{OQ}$ on kohtisuorassa suoraa AB vastaan, niin se on kohtisuorassa suoran suuntavektoria $\overline{BA}$ vastaan, ja vektorien pistetulo on nolla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan parametrin t arvo.

$$\begin{aligned}
\overline{OQ} \cdot \overline{BA} &= 0 \\
((1+3t)\overline{i} + (1+4t)\overline{j}) \cdot (3\overline{i} + 4\overline{j}) &= 0 \\
(1+3t) \cdot 3 + (1+4t) \cdot 4 &= 0 \\
25t + 7 &= 0 \\
t &= -\frac{7}{25}
\end{aligned}$$

Lasketaan pisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $t = -\frac{7}{25}$ suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases}
x = 1 + 3t = 1 + 3 \cdot (-\frac{7}{25}) = \frac{4}{25} \\
y = 1 + 4t = 1 + 4 \cdot (-\frac{7}{25}) = -\frac{3}{25}
\end{cases}$$

Siten piste $(\frac{4}{25},-\frac{3}{25})$ on suoran AB pisteistä lähimpänä origoa.

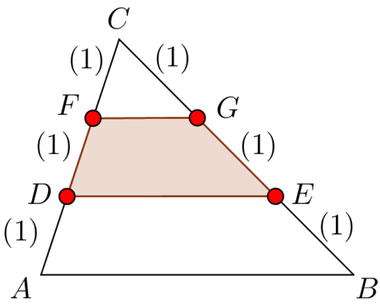
Origon etäisyys suorasta on origon ja pisteen Q välinen etäisyys eli pisteen Q paikkavektorin $\overline{OQ}=\frac{4}{25}\overline{i}-\frac{3}{25}\overline{j}$ pituus.

$$\left|\overline{OQ}\right|=\sqrt{(\frac{4}{25})^2+(-\frac{3}{25})^2}=\sqrt{\frac{25}{625}}=\frac{1}{5}$$

Origon etäisyys suorasta eli kysytty korkeusjanan pituus on $\frac{1}{5}$.

Vastaus $\frac{1}{5}$

K48



a) On osoitettava, että jana DE sivun AB kanssa yhdensuuntainen ja sen pituus on $\frac{2}{3}$ sivun AB pituudesta. Pitää siis osoittaa, että $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

Muodostetaan vektori $\overline{DE}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{DE} &= \overline{DC} + \overline{CE} \\
&= \frac{2}{3}\overline{AC} + \frac{2}{3}\overline{CB} \\
&= \frac{2}{3}(\overline{AC} + \overline{CB}) \\
&= \frac{2}{3}\overline{AB}
\end{aligned}
$$

On siis osoitettu, että $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. $\square$

b) Nelikulmio $DEGF$ on puolisuunnikas, jos sivut DE ja FG ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan vektori $\overline{FG}$.

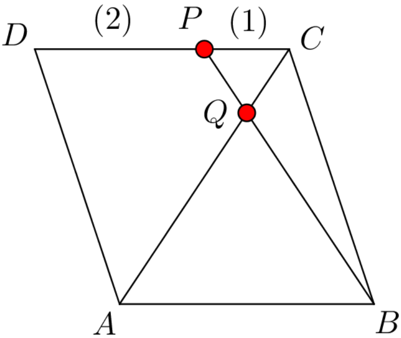
$$
\begin{aligned}
\overline{FG} &= \overline{FC} + \overline{CG} \\
&= \frac{1}{3}\overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{CB} \\
&= \frac{1}{3}(\overline{AC} + \overline{CB}) \\
&= \frac{1}{3}\overline{AB}
\end{aligned}
$$

Koska $\overline{FG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ja $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, niin

$$\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB} = 2 \cdot \frac{1}{3}\overline{AB} = 2\overline{FG}.$$

Siten sivut DE ja FG ovat yhdensuuntaiset, joten nelikulmio $DEGF$ on puolisuunnikas. □

K49



Tutkitaan oheisen kuvan suunnikasta $ABCD$. Merkitään $\overline{AQ} = s\overline{AC}$ ja $\overline{BQ} = t\overline{BP}$, missä s ja t ovat reaalilukuja. Kertoimien s ja t selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AQ}$ kahdella eri tavalla. Valitaan kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= s\overline{AC}\\ &= s(\overline{AB} + \overline{BC})\\ &= s(\overline{AB} + \overline{AD}) = s\overline{AB} + s\overline{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= \overline{AB} + \overline{BQ} = \overline{AB} + t\overline{BP}\\ &= \overline{AB} + t(\overline{BC} + \overline{CP})\\ &= \overline{AB} + t(\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{CD}) = \overline{AB} + t(\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{DC})\\ &= \overline{AB} + t(\overline{AD} - \frac{1}{3}\overline{AB}) = \overline{AB} + t\overline{AD} - \frac{1}{3}t\overline{AB}\\ &= (1 - \frac{1}{3}t)\overline{AB} + t\overline{AD}\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AQ} = \overline{AQ}$$

$$s\overline{AB} + s\overline{AD} = (1 - \frac{1}{3}t)\overline{AB} + t\overline{AD}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} s = 1 - \frac{1}{3}t \\ s = t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan (esim. laskimella) $s = \frac{3}{4}$ ja $t = \frac{3}{4}$.

Siten $\overline{AQ} = s\overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AC}$, joten piste Q jakaa lävistäjän AC suhteessa 3 : 1.

Vastaus suhteessa 3 : 1

M1

Yhtälöryhmän $\begin{cases} r + \quad 3 = 1 \\ 2s + 12 = 0 \\ 3s - 18 = 0 \end{cases}$ keskimmäisestä yhtälöstä saadaan muuttujalle s ratkaisu

$$\begin{aligned} 2s + 12 &= 0 \\ 2s &= -12 \\ s &= -6. \end{aligned}$$

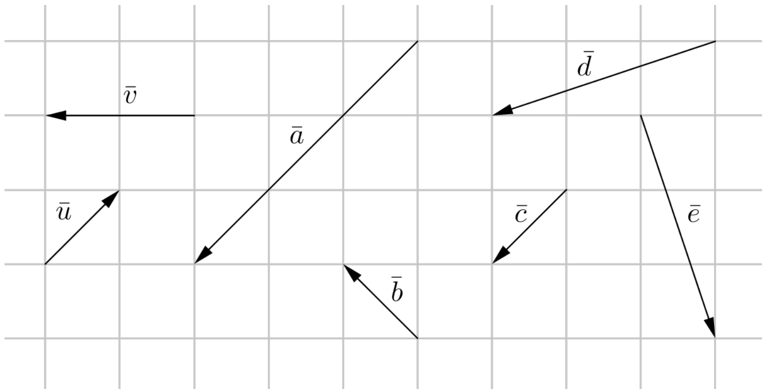
Viimeisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 3s - 18 &= 0 \\ 3s &= 18 \\ s &= 6. \end{aligned}$$

Koska muuttujalla s ei ole yksikäsitteistä ratkaisua, joka toteuttaisi yhtälöryhmän kaikki yhtälöt, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus c

M2

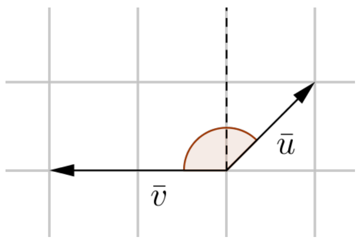


Vektorit ovat toistensa vastavektorit, jos ne ovat vastakkaissuuntaiset ja yhtä pitkät. Vektorin $\overline{u}$ vastavektori on vektori $\overline{c}$.

Vastaus c

M3

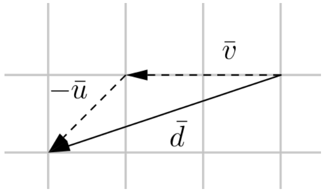
Siirretään vektori $\overline{v}$ alkamaan samasta pisteestä kuin vektori $\overline{u}$. Nähdään, että vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ välinen kulma muodostuu suorakulmasta ja suorakulman puolikkaasta. Siten $\sphericalangle(\overline{u},\overline{v}) = 90° + 45° = 135°$.



Vastaus b

M4

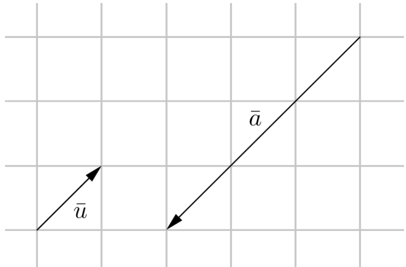
$\overline{d} = \overline{v} - \overline{u}$



Vastaus c

M5

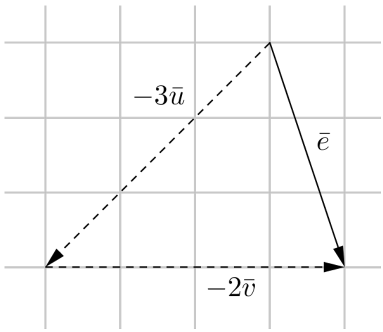
Vektori $\overline{u}$ on $\frac{1}{3}$ kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{a}$ ja sen kanssa vastakkaissuuntainen, joten $\overline{u} = -\frac{1}{3}\overline{a}$.



Vastaus c

M6

$\overline{e} = -3\overline{u} - 2\overline{v}$



Vastaus b

M7

Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $(2,\ a+1)$ paikkavektori on

$$2\overline{i}+(a+1)\overline{j}=2\overline{i}+a\overline{j}+\overline{j}=2\overline{i}+\overline{j}+a\overline{j}\ .$$

Vastaus b ja c

M8

$$\left|\overline{v}\right|=\left|-12\overline{i}+35\overline{j}\right|=\sqrt{(-12)^2+35^2}=\sqrt{144+1225}=\sqrt{1369}=37$$

Vastaus b

M9

Voidaan huomata, että . Siten vektorit ovat yhdensuuntaiset ja erityisesti vastakkaissuuntaiset, koska .

Vastaus a ja c

M10

Vektorin $-3\overline{i}+4\overline{j}$ pituus on

$|-3\overline{i}+4\overline{j}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

10 pituusyksikön siirtyminen vastavektorin suuntaan tarkoittaa siis sitä, että kuljetaan vektori $-2\cdot(-3\overline{i}+4\overline{j})=6\overline{i}-8\overline{j}$. Päädytään pisteeseen $(6,-8)$.

Vastaus b

M11

Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja z-koordinaatti $\overline{k}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $(3,0,7)$ paikkavektori on $3\overline{i}+0\overline{j}+7\overline{k}=3\overline{i}+7\overline{k}$.

Vastaus c

M12

$$\begin{aligned}\overline{a}-\overline{b} &= 2\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}-(\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k})\\ &= 2\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}-\overline{i}-5\overline{j}+6\overline{k}\\ &= \overline{i}-9\overline{j}+7\overline{k}\end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}\overline{b}-\overline{a} &= \overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}-(2\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k})\\ &= \overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}-2\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}\\ &= -\overline{i}+9\overline{j}-7\overline{k}\end{aligned}$$

Vastaus b ja c

M13

$$\left|\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Vastaus c

M14

Vektorit ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että . Tutkitaan, onko yhtälöllä ratkaisua.

$$\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + 3\bar{k} = r(-3\bar{i} - \bar{j} + 9\bar{k})$$

$$\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + 3\bar{k} = -3r\bar{i} - r\bar{j} + 9r\bar{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 1 = -3r \\ -\frac{1}{3} = -r \\ 3 = 9r \end{cases}$$

Ratkaistaan kaikista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = -\frac{1}{3} \\ r = \frac{1}{3} \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Nähdään, että yksikäsitteistä ratkaisua ei löydy. Siten vektorit eivät ole yhdensuuntaiset vaan erisuuntaiset.

Vastaus c

M15

Lasketaan pistetulot. Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on nolla.

$$(2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) \cdot (-2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k})$$
$$= 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -14$$
$$(2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) \cdot (\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k})$$
$$= 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = 9$$

$$(2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}) \cdot (4\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k})$$
$$= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Kohtisuora vektori on $4\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$.

Vastaus c

M16

Tarkastellaan neliötä $\left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2$.

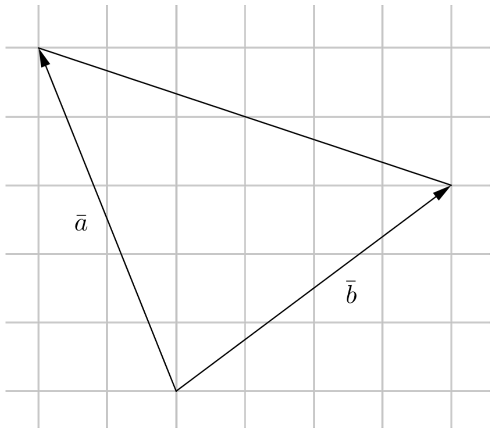
$$\begin{aligned}\left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2 &= (\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) \\ &= \overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{a} \cdot (-\overline{b}) - \overline{b} \cdot \overline{a} - \overline{b} \cdot (-\overline{b}) \\ &= \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{b} \\ &= \left|\overline{a}\right|^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \left|\overline{b}\right|^2\end{aligned}$$

Siten $2\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2 - \left|\overline{a} - \overline{b}\right|^2 = 5^2 + 12^2 - 13^2 = 0$, joten $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Vastaus a

M17

Ratkaistaan tehtävä graafisesti.



Kuvan perusteella kolmio on teräväkulmainen.

Vastaus a

M18

$$\begin{aligned}\overline{a}\cdot\overline{b} &= |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})\\ &= |\overline{a}||\overline{b}|\cdot\cos 91^\circ\\ &\approx -0,017\cdot|\overline{a}||\overline{b}|\end{aligned}$$

Pituudet $|\overline{a}|$ ja $|\overline{b}|$ ovat positiivisia, joten pistetulo $\overline{a}\cdot\overline{b}$ on negatiivinen.

Vastaus b

M19

Merkitään pisteitä $A(7,0,-8)$ ja $B(6,5,-8)$. Suoran suuntavektoriksi voidaan valita vektori $\overline{AB}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (6-7)\overline{i} + (5-0)\overline{j} + (-8-(-8))\overline{k} \\ &= -\overline{i} + 5\overline{j} + 0\overline{k} \\ &= -\overline{i} + 5\overline{j}\end{aligned}$$

Vastaus b

M20

Suora kulkee pisteen $(7,0,-8)$ kautta ja suoran suuntavektori on edellisen tehtävän perusteella $-\overline{i} + 5\overline{j} = -\overline{i} + 5\overline{j} + 0\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 5t \\ z = -8, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Vastaus c

M21

Taso kulkee pisteen $(1,0,1)$ kautta ja sen suuntavektorit ovat $-\overline{i}+2\overline{j}$ ja $\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$, joten tason parametriesitys on

missä s ja t ovat reaalilukuja.

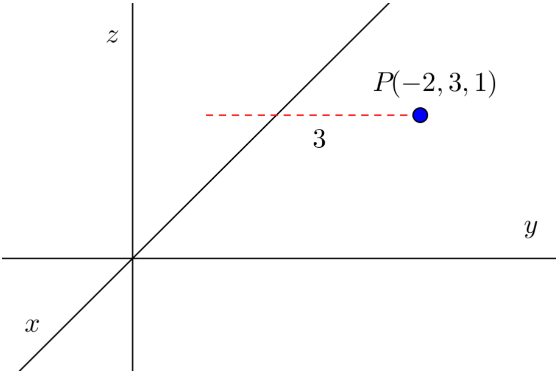
Vastaus a

M22

Muuttujien kertoimista voidaan suoraan lukea, että yksi tason $2x-y+3z-5=0$ normaalivektori on $2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$. Toisaalta myös vastavektori $-2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$ käy normaalivektoriksi yhtä hyvin.

Vastaus a ja b

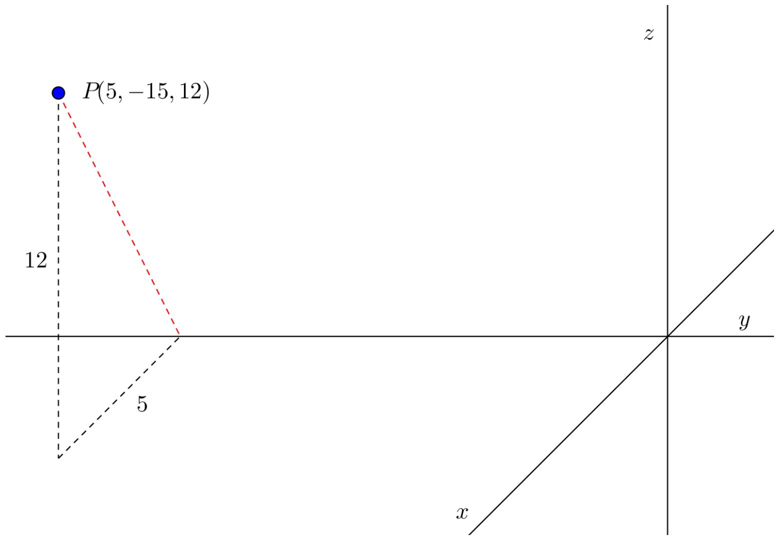
M23



Pisteen $P(-2,3,1)$ etäisyys xz-tasosta on 3 (y-koordinaatin arvo).

Vastaus c

M24

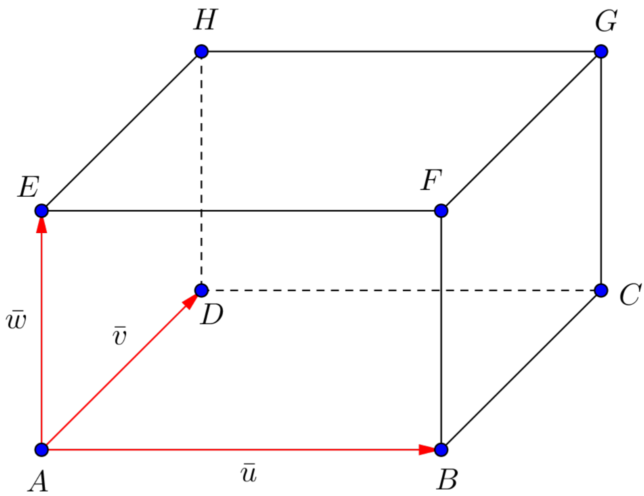


Pisteen $P(5,-15,12)$ etäisyys y-akselista saadaan laskettua Pythagoraan lauseella.

$$\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

Vastaus a

A1



a) Kuvan perusteella $\overline{CB} = -\overline{v}$.

b) $\overline{HC} = \overline{HG} + \overline{GC} = \overline{u} - \overline{w}$

c) $\overline{EC} = \overline{EH} + \overline{HG} + \overline{GC} = \overline{v} + \overline{u} - \overline{w} = \overline{u} + \overline{v} - \overline{w}$

Vastaus a) $\overline{CB} = -\overline{v}$

b) $\overline{HC} = \overline{u} - \overline{w}$

c) $\overline{EC} = \overline{u} + \overline{v} - \overline{w}$

A2

Ratkaistaan yhtälöstä $3(\overline{a}+\overline{b})-(\overline{a}-\overline{b})=\overline{0}$ vektori $\overline{a}$.

$$\begin{aligned} 3(\overline{a}+\overline{b})-(\overline{a}-\overline{b}) &= \overline{0} \\ 3\overline{a}+3\overline{b}-\overline{a}+\overline{b} &= \overline{0} \\ 2\overline{a}+4\overline{b} &= \overline{0} \\ 2\overline{a} &= -4\overline{b} \\ \overline{a} &= -2\overline{b} \end{aligned}$$

Koska kerroin -2 on negatiivinen, vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Vektori $\overline{a}$ on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$.

Vastaus Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset.
Vektori on kaksi kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{b}$.

A3

On etsittävä sellaiset luvut r ja s, että .

Muokataan yhtälöä.

$$
\begin{aligned}
8\overline{a}-15\overline{b} &= r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}\\
8\overline{a}-15\overline{b} &= r\overline{a}-r\overline{b}+s\overline{b}\\
8\overline{a}-15\overline{b} &= r\overline{a}+(-r+s)\overline{b}
\end{aligned}
$$

Komponenttiesitys on yksikäsitteinen, joten vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kertoimien on oltava yhtä suuret yhtälön molemmilla puolilla.

$$
\begin{cases}
r \quad\quad = 8\\
-r+s = -15
\end{cases}
$$

Ylemmästä yhtälöstä nähdään suoraan, että $r=8$.

Ratkaistaan s alemmasta yhtälöstä.

$$
\begin{aligned}
-r+s &= -15\\
s &= -15+r=-15+8=-7
\end{aligned}
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
8\overline{a}-15\overline{b} &= r(\overline{a}-\overline{b})+s\overline{b}\\
&= 8(\overline{a}-\overline{b})-7\overline{b}.
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad 8\overline{a}-15\overline{b}=8(\overline{a}-\overline{b})-7\overline{b}$

A4

Vektori $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j}$, joten

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \ .$$

Vektori $\overline{b} = 5\overline{i} - 5\overline{j}$, joten

$$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \ .$$

Vektori $\overline{a} + \overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{i} - 5\overline{j} = 8\overline{i} - 6\overline{j}$, joten

$$\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \ .$$

Vastaus $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{10}$, , $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = 10$

A5

a) Pisteiden $A = (2,3)$ ja $B = (5,-1)$ välinen vektori $\overline{AB}$ saadaan vähentämällä loppupisteen koordinaateista alkupisteen koordinaatit.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-2)\overline{i} + (-1-3)\overline{j} \\ &= 3\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

b) Lasketaan vektorin pituus.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Vektorin $\overline{AB}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\begin{aligned}\overline{AB}^0 &= \frac{1}{\left|\overline{AB}\right|} \cdot \overline{AB} \\ &= \frac{1}{5}(3\overline{i} - 4\overline{j}) = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}.\end{aligned}$$

Siten yksikkövektori $\overline{a}$, joka on vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{AB}$ kanssa, on

$$\overline{a} = -\overline{AB}^0 = -\frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{j}.$$

Vastaus a) $\overline{AB} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$

b) $\overline{a} = -\frac{3}{5}\overline{i} + \frac{4}{5}\overline{j}$

A6

a) Pisteen x-koordinaatti on sen paikkavektorin $\overline{i}$ -suuntaisen komponentin kerroin, y-koordinaatti $\overline{j}$ -suuntaisen komponentin kerroin ja z-koordinaatti $\overline{k}$ -suuntaisen komponentin kerroin. Siten pisteen $A(2,-4,4)$ paikkavektori on

$$\overline{OA} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}.$$

b) Merkitään loppupistettä kirjaimella B.

Vektorin $\overline{OA} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$ pituus on
$|\overline{OA}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$.

Kolmen pituusyksikön siirtyminen vastaa siis sitä, että kuljetaan puolet vektorista $\overline{OA}$.

Määritetään loppupisteen B paikkavektori.

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \frac{1}{2}\overline{OA} \\ &= \frac{1}{2}(2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}) \\ &= \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $B = (1,-2,2)$.

Vastaus a) $\overline{OA} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + 4\overline{k}$
b)

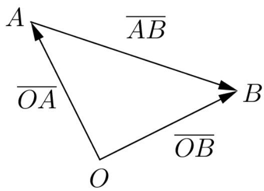
A7

a) On selvitettävä alkupiste A, kun kuljetaan vektori $\overline{AB} = 17\overline{i} - \overline{j} + 19\overline{k}$ ja päädytään pisteeseen .

Pisteen $B(5, -5, 40)$ paikkavektori on .

Muodostetaan pisteen A paikkavektori.

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OB} - \overline{AB} \\ &= 5\overline{i} - 5\overline{j} + 40\overline{k} - (17\overline{i} - \overline{j} + 19\overline{k}) \\ &= 5\overline{i} - 5\overline{j} + 40\overline{k} - 17\overline{i} + \overline{j} - 19\overline{k} \\ &= -12\overline{i} - 4\overline{j} + 21\overline{k} \end{aligned}$$



Alkupiste on siis $A(-12, -4, 21)$.

b) Määritetään pisteen D paikkavektori.

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \overline{OB} + 2\overline{AB} \\ &= 5\overline{i} - 5\overline{j} + 40\overline{k} + 2(17\overline{i} - \overline{j} + 19\overline{k}) \\ &= 5\overline{i} - 5\overline{j} + 40\overline{k} + 34\overline{i} - 2\overline{j} + 38\overline{k} \\ &= 39\overline{i} - 7\overline{j} + 78\overline{k} \end{aligned}$$

Saadaan siis piste $D(39, -7, 78)$.

Vastaus a) $A(-12, -4, 21)$
b)

A8

a) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja pistetulo.

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot \overline{b} &= (\overline{i} + \overline{k}) \cdot (-\overline{i} + \overline{j}) \\
&= (\overline{i} + 0\overline{j} + \overline{k}) \cdot (-\overline{i} + \overline{j} + 0\overline{k}) \\
&= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\
&= -1 + 0 + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Koska pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b} \neq 0$, niin vektorit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vastaus a) ovat kohtisuorassa
b) eivät ole kohtisuorassa

A9

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{a} = r\overline{b}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{a} = r\overline{b}$, $r \neq 0$, ratkaisu joillain vakion t arvoilla.

$$\begin{aligned} \overline{a} &= r\overline{b} \\ 2\overline{i} - \overline{j} &= r(t\overline{i} + 3\overline{j}) \\ 2\overline{i} - \overline{j} &= rt\overline{i} + 3r\overline{j} \end{aligned}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 2 = rt \\ -1 = 3r \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan ratkaisu $r = -\frac{1}{3}$. Sijoitetaan ratkaisu ylempään yhtälöön ja ratkaistaan t.

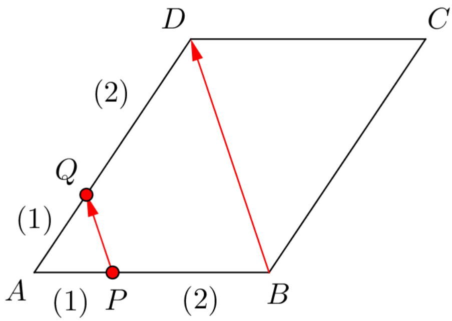
$$\begin{aligned} 2 &= rt \\ rt &= 2 \\ -\frac{1}{3}t &= 2 \\ t &= -6 \end{aligned}$$

Kun $t=-6$, vektorit ovat $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{b}=t\overline{i}+3\overline{j}=-6\overline{i}+3\overline{j}$.

Koska tällöin $\overline{a}=r\overline{b}=-\frac{1}{3}\overline{b}$ ja $-\frac{1}{3}<0$, niin vektorit ovat vastakkaissuuntaiset.

Vastaus Vektorit ovat yhdensuuntaiset, kun $t=-6$. Vektorit ovat tällöin vastakkaissuuntaiset.

A10



Lausutaan vektorit $\overline{BD}$ ja $\overline{PQ}$ vektorien $\overline{BA}$ ja $\overline{AD}$ avulla.

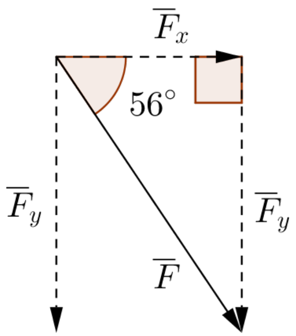
$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD}$$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \overline{PA} + \overline{AQ} \\ &= \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{AD})\end{aligned}$$

Nähdään siis, että $\overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{BD}$. Tulos tarkoittaa, että vektorit $\overline{BD}$ ja $\overline{PQ}$ ovat samansuuntaiset ja vektorin $\overline{BD}$ pituus on kolminkertainen vektorin $\overline{PQ}$ pituuteen verrattuna.

Vastaus $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{AD})$. Vektori $\overline{BD}$ on samansuuntainen ja kolme kertaa niin pitkä kuin vektori $\overline{PQ}$.

B1



Voiman $\overline{F}$ suuruus $F = 250$ N.

Lasketaan komponenttien suuruudet kuvan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 56° = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F\cos 56° = 250\text{ N}\cdot\cos 56° = 139,7...\text{ N} \approx 140\text{ N}$$

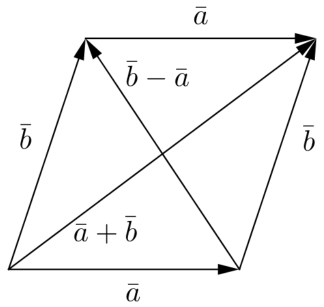
$$\sin 56° = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F\sin 56° = 250\text{ N}\cdot\sin 56° = 207,2...\text{ N} \approx 210\text{ N}$$

Vastaus $\quad F_x \approx 140$ N ja $F_y \approx 210$ N

B2

Merkitään annettua suunnikkaan sivuvektoria $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$ ja annettua lävistäjävektoria $\overline{a} + \overline{b} = 4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, missä $\overline{b}$ on toinen sivuvektori. Määritetään vektori $\overline{b}$.



$$
\begin{aligned}
\overline{b} &= -\overline{a} + (\overline{a} + \overline{b}) \\
&= -(2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}) + 4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k} \\
&= -2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k} + 4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k} \\
&= 2\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}
\end{aligned}
$$

Suunnikkaan toinen lävistäjävektori on $\overline{b} - \overline{a}$ eli

$$
\begin{aligned}
\overline{b} - \overline{a} &= 2\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k} - (2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}) \\
&= 2\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k} - 2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k} \\
&= 0\overline{i} + 3\overline{j} - 7\overline{k} \\
&= 3\overline{j} - 7\overline{k}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan molempien lävistäjien pituus.

$$\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,2$$

$$\left|\overline{b} - \overline{a}\right| = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \approx 7,6$$

Suunnikkaan lyhyemmän lävistäjän pituus on siis $3\sqrt{2}$.

Vastaus $\quad 3\sqrt{2}$

B3

Merkitään pistettä, johon päädytään kirjaimella B. Piste B saadaan selville määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OB}$. Selvitetään ensin pisteen A paikkavektori ja vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori .

Pisteen $A(-7,13,8)$ paikkavektori on $\overline{OA} = -7\overline{i} + 13\overline{j} + 8\overline{k}$.

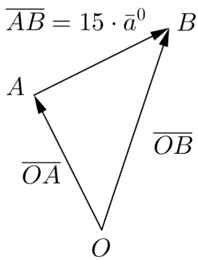
Vektorin $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$ pituus on

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Vektorin $\overline{a}$ suuntainen yksikkövektori on

$$\overline{a}^0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a} = \frac{1}{3}(2\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}) = \frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}.$$

Määritetään pisteen B paikkavektori.



$$\begin{aligned}
\overline{OB} &= \overline{OA} + 15 \cdot \overline{a}^0 \\
&= -7\overline{i} + 13\overline{j} + 8\overline{k} + 15 \cdot (\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}) \\
&= -7\overline{i} + 13\overline{j} + 8\overline{k} + 10\overline{i} - 5\overline{j} - 10\overline{k} \\
&= 3\overline{i} + 8\overline{j} - 2\overline{k}
\end{aligned}$$

Päädytään siis pisteeseen $(3,8,-2)$.

Vastaus pisteeseen $(3,8,-2)$

B4

Kolmio on suorakulmainen, jos jokin sen kulmista on suora.

Muodostetaan vektorit, jotka määräävät kolmion ABC sivut.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (4-(-1))\overline{i} + (-1-3)\overline{j} \\ &= 5\overline{i} - 4\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= (1-(-1))\overline{i} + (5-3)\overline{j} \\ &= 2\overline{i} + 2\overline{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= (1-4)\overline{i} + (5-(-1))\overline{j} \\ &= -3\overline{i} + 6\overline{j}\end{aligned}$$

Lasketaan sivuvektorien pistetulot.

$$\begin{aligned}\overline{AB}\cdot\overline{AC} &= (5\overline{i} - 4\overline{j})\cdot(2\overline{i} + 2\overline{j}) \\ &= 5\cdot 2 - 4\cdot 2 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}\cdot\overline{BC} &= (5\overline{i} - 4\overline{j})\cdot(-3\overline{i} + 6\overline{j}) \\ &= 5\cdot(-3) - 4\cdot 6 = -39\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC}\cdot\overline{BC} &= (2\overline{i} + 2\overline{j})\cdot(-3\overline{i} + 6\overline{j}) \\ &= 2\cdot(-3) + 2\cdot 6 = 6\end{aligned}$$

Yksikään pistetuloista ei ole nolla, joten kolmion mikään kulma ei ole suora. Siten kolmio ABC ei ole suorakulmainen.

Vastaus ei ole

B5

Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Muodostetaan kolmion sivuja vastaavat vektorit ja lasketaan niiden pituudet.

Sivu AB:

$$\overline{AB} = (3-2)\overline{i} + (0-(-3))\overline{j} + (1-(-1))\overline{k} = \overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$$
$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} \approx 3,7$$

Sivu AC:

$$\overline{AC} = (-1-2)\overline{i} + (2-(-3))\overline{j} + (3-(-1))\overline{k} = -3\overline{i} + 5\overline{j} + 4\overline{k}$$
$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,1$$

Sivu BC:

$$\overline{BC} = (-1-3)\overline{i} + (2-0)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = -4\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k}$$
$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4,9$$

Kolmion pisin sivu on AC, joten kolmion suurin kulma on $\sphericalangle B = \sphericalangle(-\overline{AB}, \overline{BC})$.

Lasketaan pistetulo ja vektorien välinen kulma.

$$
\begin{aligned}
-\overline{AB}\cdot\overline{BC} &= (-\overline{i}-3\overline{j}-2\overline{k})\cdot(-4\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k})\\
&= -1\cdot(-4)-3\cdot 2-2\cdot 2\\
&= -6
\end{aligned}
$$

$$\cos(-\overline{AB},\overline{BC})=\frac{-\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|-\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|}=\frac{-6}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{6}}=\frac{-3}{2\sqrt{21}}$$

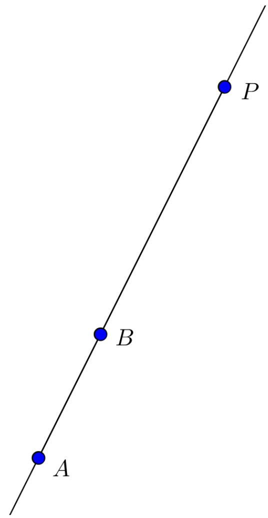
$$\sphericalangle(-\overline{AB},\overline{BC})=\cos^{-1}(-\frac{3}{2\sqrt{21}})=109{,}10...^\circ\approx 109^\circ$$

Kolmion suurin kulma on 109°.

Vastaus $\quad 109^\circ$

B6

Kolme pistettä A, B ja P ovat samalla suoralla, jos esimerkiksi pisteiden väliset vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ ovat yhdensuuntaiset.



Pisteiden $A(-2,0,-1)$ ja $B(1,8,-3)$ välinen vektori $\overline{AB}$ on

$$\overline{AB} = (1-(-2))\overline{i} + (8-0)\overline{j} + (-3-(-1))\overline{k}$$
$$= 3i + 8\overline{j} - 2\overline{k}.$$

Pisteiden $A(-2,0,-1)$ ja $P(7,24,-7)$ välinen vektori $\overline{AP}$ on

$$\overline{AP} = (7-(-2))\overline{i} + (24-0)\overline{j} + (-7-(-1))\overline{k}$$
$$= 9i + 24\overline{j} - 6\overline{k}.$$

Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun löytyy sellainen nollasta eroava reaaliluku r, että $\overline{AB} = r\overline{AP}$.

Tutkitaan, onko yhtälöllä $\overline{AB} = r\overline{AP}$, $r \neq 0$, ratkaisu.

$$\overline{AB} = r\overline{AP}$$
$$3i + 8\overline{j} - 2\overline{k} = r(9i + 24\overline{j} - 6\overline{k})$$
$$3i + 8\overline{j} - 2\overline{k} = 9ri + 24r\overline{j} - 6r\overline{k}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} 3 = 9r \\ 8 = 24r \\ -2 = -6r \end{cases}$$

Ratkaistaan kaikista yhtälöistä r.

$$\begin{cases} r = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} \\ r = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3} \\ r = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Saatiin ratkaisu $r = \dfrac{1}{3}$, joten $\overline{AB} = \dfrac{1}{3}\overline{AP}$. Vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AP}$ ovat siis yhdensuuntaiset ja annetut kolme pistettä A, B ja P ovat samalla suoralla.

Vastaus on

B7

Muuttujien kertoimista nähdään, että yksi tason $x-5y+6z-8=0$ normaalivektori on $\overline{n}=\overline{i}-5\overline{j}+6\overline{k}$.

Vastaavasti tason $2x+4y+3z-17=0$ yksi normaalivektori on $\overline{p}=2\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k}$.

Lasketaan normaalivektorien pistetulo.

$$\begin{aligned}\overline{n}\cdot\overline{p} &= (\overline{i}-5\overline{j}+6\overline{k})\cdot(2\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k})\\ &= 1\cdot 2-5\cdot 4+6\cdot 3\\ &= 2-20+18\\ &= 0\end{aligned}$$

Koska normaalivektorien pistetulo on nolla, vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Siten myös tasot ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. $\square$

B8

Suora kulkee pisteen $A(5,0,3)$ kautta ja sen suuntavektori on $\overline{s} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 6\overline{k}$, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = \quad -5t \\ z = 3 + 6t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Taso kulkee pisteen $B(2,-1,0)$ kautta ja sen suuntavektorit ovat $\overline{u} = 2\overline{i} + 3\overline{k}$ ja $\overline{v} = -3\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$, joten tason parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \quad 2 + 2r - 3s \\ y = -1 \qquad + 2s \\ z = \qquad 3r - 3s, \end{cases}$$

missä r ja s ovat reaalilukuja.

Suoran ja tason leikkauspisteen (x, y, z) koordinaatit toteuttavat sekä tason että suoran parametriesityksen. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = \dfrac{4}{3}$, $s = -\dfrac{1}{3}$ ja $t = \dfrac{1}{3}$.

Koska yhtälöryhmällä on ratkaisu, suora ja taso leikkaavat toisensa. Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla arvo suoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = 5 + 2t = 5 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{3} \\ y = -5t = -5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} \\ z = 3 + 6t = 3 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 5 \end{cases}$$

Leikkauspiste on $(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3}, 5)$.

Vastaus $(\frac{17}{3}, -\frac{5}{3}, 5)$

B9

a) Muodostetaan pisteiden $A(-12,1,5)$ ja $B(-9,4,8)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

Muodostetaan suoran AB parametriesitys.

$$\begin{cases} x = -12 + 3t \\ y = \quad 1 + 3t \\ z = \quad 5 + 3t, \end{cases}$$

missä t on reaaliluku.

Muodostetaan pisteiden $C(-8,-1,5)$ ja $D(-11,5,8)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori.

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= (-11-(-8))\overline{i} + (5-(-1))\overline{j} + (8-5)\overline{k} \\ &= -3\overline{i} + 6\overline{j} + 3\overline{k} \end{aligned}$$

Muodostetaan suoran CD parametriesitys.

$$\begin{cases} x = -8 - 3s \\ y = -1 + 6s \\ z = \quad 5 + 3s, \end{cases}$$

missä s on reaaliluku.

Suorien leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat molemmat parametriesitykset. Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} -12+3t=-8-3s \\ 1+3t=-1+6s \\ 5+3t=5+3s \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $s=\frac{2}{3}$ ja $t=\frac{2}{3}$.

Lasketaan leikkauspisteen koordinaatit esimerkiksi sijoittamalla $t=\frac{2}{3}$ suoran AB parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x=-12+3t=-12+3\cdot\frac{2}{3}=-10 \\ y=1+3t=1+3\cdot\frac{2}{3}=3 \\ z=5+3t=5+3\cdot\frac{2}{3}=7 \end{cases}$$

Suorien leikkauspiste on $(-10,3,7)$.

b) Merkitään a-kohdassa laskettua suorien leikkauspistettä kirjaimella P. Olkoon Q se tason $5x+3y+z=1$ piste, joka on lähimpänä pistettä P. Tällöin piste Q on pisteen P kautta piirretyn tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste.

Normaalisuoran suuntavektoriksi voidaan valita tason normaalivektori. Tason yksi normaalivektori on $\overline{n}=5\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$.

Normaalisuora kulkee pisteen $P(-10,3,7)$ kautta, joten suoran parametriesitys on

$$\begin{cases} x=-10+5r \\ y=\quad 3+3r \\ z=\quad 7+r, \end{cases}$$

missä r on reaaliluku.

Sijoitetaan lausekkeet tason yhtälöön ja ratkaistaan parametrin r arvo.

$$\begin{aligned} 5\cdot(-10+5r)+3\cdot(3+3r)+(7+r)&=1 \\ 35r-34&=1 \\ r&=1 \end{aligned}$$

Lasketaan leikkauspisteen Q koordinaatit sijoittamalla saatu parametrin arvo $r = 1$ normaalisuoran parametriesitykseen.

$$\begin{cases} x = -10 + 5r = -5 \\ y = 3 + 3r = 6 \\ z = 7 + r = 8 \end{cases}$$

Pisteeksi Q saadaan $(-5, 6, 8)$.

Pisteen P etäisyys tasosta on pisteiden P ja Q välinen etäisyys. Muodostetaan vektori $\overline{PQ}$ ja lasketaan sen pituus.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= (-5-(-10))\overline{i} + (6-3)\overline{j} + (8-7)\overline{k} \\ &= 5\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k} \end{aligned}$$

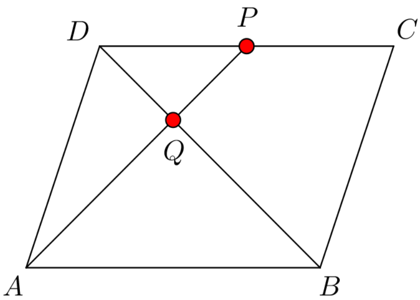
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$

Siis suorien AB ja CD leikkauspisteen P etäisyys tasosta on $\sqrt{35}$.

Vastaus a) $(-10, 3, 7)$

b) $\sqrt{35}$

B10



Tutkitaan oheisen kuvan suunnikasta $ABCD$. Merkitään $\overline{AQ} = s\overline{AP}$ ja $\overline{DQ} = t\overline{DB}$, missä s ja t ovat reaalilukuja. Kertoimien s ja t selvittämiseksi tarvitaan vektoriyhtälö, joten esitetään vektori $\overline{AQ}$ kahdella eri tavalla. Valitaan kantavektoreiksi $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned}
\overline{AQ} &= s\overline{AP} \\
&= s(\overline{AD} + \overline{DP}) \\
&= s(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC}) \\
&= s(\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}) \\
&= \frac{1}{2}s\overline{AB} + s\overline{AD}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{AQ} &= \overline{AD} + \overline{DQ} \\
&= \overline{AD} + t\overline{DB} \\
&= \overline{AD} + t(\overline{DA} + \overline{AB}) \\
&= \overline{AD} + t(-\overline{AD} + \overline{AB}) \\
&= \overline{AD} - t\overline{AD} + t\overline{AB} \\
&= t\overline{AB} + (1-t)\overline{AD}
\end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö.

$$\overline{AQ} = \overline{AQ}$$

$$\frac{1}{2}s\overline{AB} + s\overline{AD} = t\overline{AB} + (1-t)\overline{AD}$$

Koska komponenttiesitys on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s = t \\ s = 1-t \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan (esim. laskimella) $s = \frac{2}{3}$ ja $t = \frac{1}{3}$.

Siten $\overline{AQ} = s\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AP}$, joten piste Q jakaa janan AP suhteessa 2 : 1.

Vastaus suhteessa 2 : 1