266

a) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 = 4^2 = (x+4)^2$

b) $25 + 10y + y^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot y + y^2 = (5+y)^2$

c) $4z^2 + 4z + 1 = (2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot 1 + 1^2 = (2z+1)^2$

Vastaus: a) $(x+4)^2$ b) $(5+y)^2$ c) $(2z+1)^2$

267

a) $x^2 - 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-6) + (-6)^2 = (x-6)^2$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-5) + (-5)^2 = (2x-5)^2$

c) $z^4 - 2x^2 + 1 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-1) + (-1)^2$

$$= (x^2 - 1)^2$$

$$= (x^2 - 1^2)^2$$

$$= \left((x+1)(x-1)\right)^2$$

$$= (x+1)^2 (x-1)^2$$

Vastaus: a) $(x-6)^2$ b) $(2x-5)^2$ c) $(x+1)^2(x-1)^2$

268

a) $z^2 - 9 = z^2 - 3^2 = (z+3)(z-3)$

b) $x^4 - 81 = (x^2)^2 - 9^2$

$$= (x^2+9)(x^2-9)$$

$$= (x^2+9)(x^2-3^2)$$

$$= (x^2+9)(x+3)(x-3)$$

c) $1 - y^4 = 1^2 - (y^2)^2$

$$= (1-y^2)(1+y^2)$$

$$= (1-y)(1+y)(1+y^2)$$

Vastaus:
a) $(z+3)(z-3)$
b) $(x^2+9)(x+3)(x-3)$
c) $(1-y)(1+y)(1+y^2)$

269

a) $x^3 - 25x^2 = x^2(x - 25)$

b) $32x^5 + 8x^4 = 8x^4(4x + 1)$

c) $z^{10} + z^9 = z^9(z + 1)$

Vastaus:
a) $x^2(x - 25)$
b) $8x^4(4x + 1)$
c) $z^9(z + 1)$

270

a) $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x^2 - 4^2) = x(x+4)(x-4)$

b) $16x^3 - x = x(16x^2 - 1) = x\left((4x)^2 - 1^2\right) = x(4x+1)(4x-1)$

c) $x^5 - x = x(x^4 - 1)$

$$= x\left((x^2)^2 - 1\right)^2$$

$$= x(x^2+1)(x^2-1)$$

$$= x(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

Vastaus:
a) $x(x+4)(x-4)$
b) $x(4x+1)(4x-1)$
c) $x(x^2+1)(x+1)(x-1)$

271

a) $y^3 + 2y^2 + y = y(y^2 + 2y + 1) = y(y+1)^2$

b) $y^3 - 4y^2 + 4y = y(y^2 - 4y + 4)$

$$= y(y^2 + 2 \cdot y \cdot (-2) + (-2)^2)$$

$$= y(y-2)^2$$

c) $9y^3 + 6y^2 + y = y(9y^2 + 6y + 1)$

$$= y\left((3y)^2 + 2 \cdot 3y \cdot 1 + 1^2\right)$$

$$= y(3y+1)^2$$

Vastaus: a) $y(y+1)^2$ b) $y(y-2)^2$ c) $y(3y+1)^2$

272

a) $x(7x+2)-5(7x+2)=(x-5)(7x-2)$

b) $y(y^2-1)+(y^2-1)=y(y^2-1)+1\cdot(y^2-1)$

$$=(y+1)(y^2-1)$$

$$=(y+1)(y+1)(y-1)$$

c) $z(2+z)-(2+z)=z(2+z)-1\cdot(2+z)=(z-1)(2+z)$

Vastaus:
a) $(x-5)(7x-2)$
b) $(y+1)(y+1)(y-1)$
c) $(z-1)(2+z)$

273

a) $x^3-5x^2+3x-15=x^2(x-5)+3(x-5)=(x^2+3)(x-5)$

b) $x^5+x^3-x^2-1=x^3(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)=(x^3-1)(x^2+1)$

c) $5x^3+x^2-5x-1=x^2(5x+1)-1\cdot(5x+1)$

$$=(x^2-1)(5x+1)$$

$$=(x+1)(x-1)(5x+1)$$

Vastaus:
a) $(x^2+3)(x-5)$
b) $(x^3-1)(x^2+1)$
c) $(x+1)(x-1)(5x+1)$

274

a) $x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 63x = x^3(x-7) - 9x(x-7)$

$$= (x^3 - 9x)(x-7)$$

$$= x(x^2 - 9)(x-7)$$

$$= x(x+3)(x-3)(x-7)$$

b) $x^7 - x^5 + x^2 - 1 = x^5(x^2 - 1) + 1 \cdot (x^2 - 1)$

$$= (x^5 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^5 + 1)(x+1)(x-1)$$

c) $-3x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = -x^2(3x-4) + 1 \cdot (3x-4)$

$$= (-x^2 + 1)(3x-4)$$

$$= (1 - x^2)(3x-4)$$

$$= (1+x)(1-x)(3x-4)$$

Toiselta riviltä ratkaisua voi jatkaa myös seuraavasti:
$(-x^2 + 1)(3x-4) = -(x^2 - 1)(3x-4) = -(x+1)(x-1)(3x-4)$

Vastaus:
a) $x(x+3)(x-3)(x-7)$
b) $(x^5 + 1)(x+1)(x-1)$
c) $(1+x)(1-x)(3x-4)$ eli $-(x+1)(x-1)(3x-4)$

275

a) $x^2 - 6x - 7 = x^2 - 7x + x - 7$

$= x(x-7) + 1 \cdot (x-7)$

$= (x+1)(x-7)$

b) $y^2 + 7y + 10 = y^2 + 2y + 5y + 10$

$= y(y+2) + 5(y+2)$

$= (y+5)(y+2)$

c) $2z^2 - 8z + 6 = 2z^2 - 2z - 6z + 6$

$= 2z(z-1) - 6(z-1)$

$= (2z-6)(z-1)$

$= 2(z-3)(z-1)$

Vastaus:
a) $(x+1)(x-7)$
b) $(y+5)(y+2)$
c) $2(z-3)(z-1)$

276

a) $36x^2+60x+25=(6x)^2+2\cdot 6x\cdot 5+5^2=(6x+5)^2$

b) $9x^2+3x+\frac{1}{4}=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=(3x+\frac{1}{2})^2$

c) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=x^2+2\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=(x-\frac{1}{3})^2$

Vastaus: a) $(6x+5)^2$ b) $(3x+\frac{1}{2})^2$ c) $(x-\frac{1}{3})^2$

277

a) $z^2-81=z^2-9^2=(z+9)(z-9)$

b) $9t^2-s^2=(3t)^2-s^2=(3t+s)(3t-s)$

c) $16-x^4=4^2-(x^2)^2$

$$=(4+x^2)(4-x^2)$$

$$=(4+x^2)(2^2-x^2)$$

$$=(4+x^2)(2+x)(2-x)$$

Vastaus: a) $(z+9)(z-9)$ b) $(3t+s)(3t-s)$ c) $(4+x^2)(2+x)(2-x)$

278

a) $$\frac{x^2-9}{2x-6}=\frac{x^2-3^2}{2(x-3)}=\frac{(x+3)\,\overset{1}{\cancel{(x-3)}}}{2\,\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}=\frac{x+3}{2}$$

b) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}=\frac{x^2+2\cdot x\cdot(-3)+(-3)^2}{x(x-3)}=\frac{(x-3)^{\overset{1}{\cancel{2}}}}{x\,\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}=\frac{x-3}{x}$$

c) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\frac{(x-3)^{\overset{1}{\cancel{2}}}}{(x+3)\,\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}=\frac{x-3}{x+3}$$

Vastaus: a) $\frac{x+3}{2}$ b) $\frac{x-3}{x}$ c) $\frac{x-3}{x+3}$

279

a) $\dfrac{x^3-x}{x+1}=\dfrac{x(x^2-1)}{x+1}=\dfrac{x(x-1)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}}=x(x-1)$

b) $\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2-1}=x^2-1=(x-1)(x+1)$

c) $\dfrac{x^3+10x^2+25x}{2x+10}=\dfrac{x(x^2+10x+25)}{2(x+5)}=\dfrac{x(x+5)^{\cancel{2}}}{2\,\cancel{x+5}}=\dfrac{x(x+5)}{2}$

Vastaus: a) $x(x-1)$ b) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ c) $\dfrac{x(x+5)}{2}$

280

a) $x+3x^2+3x+1=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1+1^3$

$=(x+1)^3$

b) $8x^3-12x^2+6x-1=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(-1)+3\cdot 2x\cdot(-1)^2+(-1)^3$

$=(2x-1)^3$

c) $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$=(x+2)^3$

Vastaus: a) $(x+1)^3$ b) $(2x-1)^3$ c) $(x+2)^3$

281

a) $3x^3 + x^2 + 12x + 4 = x^2(3x+1) + 4(3x+1)$

$$= (3x+1)(x^2+4)$$

b) $2x^4 + x^3 - 10x - 5 = x^3(2x+1) - 5(2x+1)$

$$= (2x+1)(x^3-5)$$

c) $7x^5 - 35x^3 + x^2 - 5 = 7x^3(x^2-5) + 1 \cdot (x^2-5)$

$$= (x^2-5)(7x^3+1)$$

Vastaus: a) $(3x+1)(x^2+4)$ b) $(2x+1)(x^3-5)$ c) $(x^2-5)(7x^3+1)$

282

a) $6x^2 - x - 1 = 6x^2 - 3x + 2x - 1$

$= 3x(2x - 1) + 1 \cdot (2x - 1)$

$= (2x - 1)(3x + 1)$

b) $y^2 - 10y + 21 = y^2 - 3y - 7y + 21$

$= y(y - 3) - 7(y - 3)$

$= (y - 3)(y - 7)$

c) $3z^2 + 13z + 4 = 3z^2 + z + 12z + 4$

$= z(3z + 1) + 4(3z + 1)$

$= (3z + 1)(z + 4)$

Vastaus: a) $(2x - 1)(3x + 1)$ b) $(y - 3)(y - 7)$ c) $(3z + 1)(z + 4)$

283

a) $$\begin{aligned}(x+1)(x^2+2x)-(x+1)(x+6) &= (x+1)(x^2+2x-(x+6))\\ &= (x+1)(x^2+x-6)\\ &= (x+1)(x^2+3x-2x-6)\\ &= (x+1)(x(x+3)-2(x+3))\\ &= (x+1)(x+3)(x-2)\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}3x(3x^2-2x-1)-3x^2+2x+1 &= 3x(3x^2-2x-1)-1\cdot(3x^2-2x-1)\\ &= (3x^2-2x-1)(3x-1)\\ &= (3x^2-3x+x-1)(3x-1)\\ &= (3x(x-1)+1\cdot(x-1))(3x-1)\\ &= (x-1)(3x+1)(3x-1)\end{aligned}$$

Vastaus: a) $(x+1)(x+3)(x-2)$ b) $(x-1)(3x+1)(3x-1)$

284

$$
\begin{aligned}
x^4-10x^2+9 &= x^4-x^2-9x^2+9 \\
&= x^2(x^2-1)-9(x^2-1) \\
&= (x^2-1)(x^2-9) \\
&= (x^2-1^2)(x^2-3^2) \\
&= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3)
\end{aligned}
$$

Vastaus: $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

285

$$\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}=\frac{x^4-x^2-4x^2+4}{x^2-4}$$

$$=\frac{x^2(x^2-1)-4(x^2-1)}{x^2-4}$$

$$=\frac{(x^2-1)\cancel{(x^2-4)}}{\cancel{x^2-4}}$$

$$=x^2-1=(x+1)(x-1)$$

Vastaus: $x^2-1=(x+1)(x-1)$

286

Muodostetaan lukujen erotus.

$$\begin{aligned} a^2+\frac{1}{2}b^2-ab &= a^2-ab+\frac{1}{2}b^2 \\ &= a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2 \\ &= a^2+2\cdot a\cdot(-\frac{1}{2}b)+(-\frac{1}{2}b)^2+\frac{1}{4}b^2 \\ &= (a-\frac{1}{2}b)^2+\frac{1}{4}b^2 \end{aligned}$$

Havaitaan, että $(a-\frac{1}{2}b^2)\geq 0$ aina, ja $\frac{1}{4}b^2>0$, koska $b\neq 0$.

Siis $(a-\frac{1}{2}b)^2+\frac{1}{4}b^2>0$

eli

$$a^2+\frac{1}{2}b^2-ab>0$$

$$a^2+\frac{1}{2}b^2>ab,\quad \text{kun } a\neq 0 \text{ ja } b\neq 0.$$

Vastaus: $a^2+\frac{1}{2}b^2$ on suurempi

287

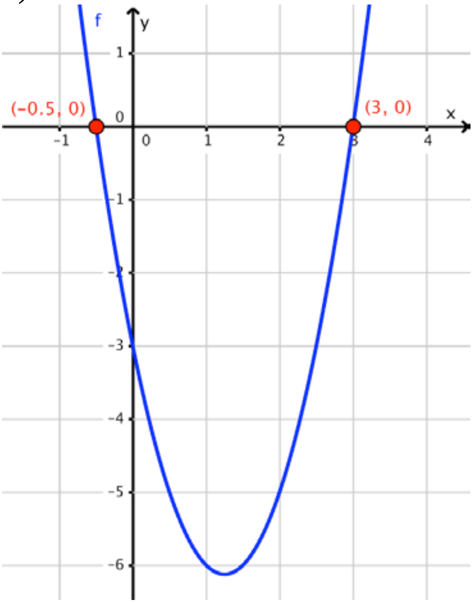
a) $(2x+1)(x-3)=0$

$2x+1=0$ tai $x-3=0$

$2x=-1$ $x=3$

$x=-\frac{1}{2}$

b)



Vastaus: $x=-\frac{1}{2}$ tai $x=3$

288

a) $-x^2 + 14x = 0$

$x(-x + 14) = 0$

$x = 0$ tai $-x + 14 = 0$

$x = 14$

b) $7x^2 + 56x = 0$

$7x(x + 8) = 0$

$7x = 0$ tai $x + 8 = 0$

$x = 0$ $x = -8$

c) $x = 9x^2$

$x - 9x^2 = 0$

$x(1 - 9x) = 0$

$x = 0$ tai $1 - 9x = 0$

$-9x = -1$

$x = \frac{1}{9}$

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = 14$ b) $x = -8$ tai $x = 0$ c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{9}$

289

a) $x^3 - 49x = 0$

$x(x - 49) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 - 49 = 0$

$x^2 = 49$

$x = 7$ tai $x = -7$

b) $x^3 + 4x = 0$

$x(x^2 + 4) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

ei ratkaisua

c) $x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$ tai $x = -1$

Vastaus:
a) $x = -7$, $x = 0$ tai $x = 7$ b) $x = 0$ c) $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 1$

290

a) $(x+1)(7x+1)=0$

$x+1=0$ tai $7x+1=0$

$x=-1$ $\quad$ $7x=-1$

$$x=-\frac{1}{7}$$

b) $(x+1)(7x+1)=1$

$$7x^2+x+7x+1=1$$

$$7x^2+8x=0$$

$$x(7x+8)=0$$

$x=0$ tai $7x+8=0$

$$7x=-8$$

$$x=-\frac{8}{7}$$

Vastaus: a) $x=-1$ tai $x=-\frac{1}{7}$ b) $x=-\frac{8}{7}$ tai $x=0$

291

a) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$

$x(x^2 + 3x - 4) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$x = \frac{-3-5}{2} = -4$ tai $x = \frac{-3+5}{2} = 1$

b) $x^3 - 2x^2 - 24x = 0$

$x(x^2 - 2x - 24) = 0$

$x = 0$ tai

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2}$$

$x = \frac{2-10}{2} = -4$ tai $x = \frac{2+10}{2} = 6$

Vastaus: a) $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 1$ b) $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 6$

292

a)

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$x^2(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2) = 0$$

Voit myös käyttää toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$x^2(x-3)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

b)

$$16x^3 = 8x^2 - x$$

$$16x^3 - 8x^2 + x = 0$$

$$x(16x^2 - 8x + 1) = 0$$

$$x((4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot (-1) + (-1)^2) = 0$$

$$x(4x-1)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x - 1 = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = 3$ b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{4}$

293

a) $x^4 - 7x^3 - x + 7 = 0$

$x^3(x-7) - 1 \cdot (x-7) = 0$

$(x^3 - 1)(x-7) = 0$

$x^3 - 1 = 0$ tai $x - 7 = 0$

$x^3 = 1$ $\quad$ $x = 7$

$x = 1$

b) $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$

$x^3(x^2+1) - 1 \cdot (x^2+1) = 0$

$(x^3 - 1)(x^2+1) = 0$

$x^3 - 1 = 0$ tai $x^2 + 1 = 0$

$x^3 = 1$ $\quad$ $x^2 = -1$

$x = 1$ $\quad$ ei ratkaisua

Vastaus: a) $x = 1$ tai $x = 7$ b) $x = 1$

294

a) $$4x^2 + 4 = 3x^3 + 3x$$

$$-3x^3 + 4x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2(-3x + 4) + 1 \cdot (-3x + 4) = 0$$

$$(x^2 + 1)(-3x + 4) = 0$$

$x^2 + 1 = 0$ tai $-3x + 4 = 0$

$x^2 = -1$ $\quad$ $-3x = -4$

ei ratkaisua $\quad$ $x = \frac{4}{3}$

b) $$x^7 - x^5 = 1 - x^2$$

$$x^7 - x^5 + x^2 - 1 = 0$$

$$x^5(x^2 - 1) + 1 \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$(x^5 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$x^5 + 1 = 0$ tai $x^2 - 1 = 0$

$x^5 = -1$ $\quad$ $x^2 = 1$

$x = -1$ $\quad$ $x = 1$ tai $x = -1$

Vastaus: a) $x = \frac{4}{3}$ b) $x = -1$ tai $x = 1$

295

a)
Luvun x viides potenssi: x^5
Luvun x kolmas potenssi: x^3

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^5 = x^3$$

$$x = -1, \quad x = 0 \text{ tai } x = 1$$

b)
Luvun x kuutio: x^3
Luvun x neliö: x^2
Luvun x kuution ja neliön keskiarvo: $\frac{x^3 + x^2}{2}$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\frac{x^3 + x^2}{2} = x$$

$$x = -2, \quad x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Vastaus: a) Luvut –1, 0 ja 1 b) Luvut –2, 0 ja 1

296

$5x^3 + ax^2 - 30x = 0$

$x(5x^2 + ax - 30) = 0$

$x = 0$ tai $5x^2 + ax - 30 = 0$

Koska $x = 0$ on aina yhtälön juuri, niin yhtälöllä on kolme juurta, kun toisen asteen yhtälöllä $5x^2 + ax - 30 = 0$ on kaksi juurta ($x = 0$ ei ole yhtälön $5x^2 + ax - 30 = 0$ juuri millään a:n arvolla).

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$D = a^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-30) = a^2 + 600$

Koska $a^2 + 600 > 0$ aina, niin yhtälöllä $5x^2 + ax - 30 = 0$ on kaksi juurta kaikilla a:n arvoilla.

Siis yhtälöllä $5x^3 + ax^2 - 30x = 0$ on kolme juurta kaikilla a:n arvoilla.

Vastaus: Luvun a kaikilla arvoilla.

297

a) $x(x-1)^2(3x+1)=0$

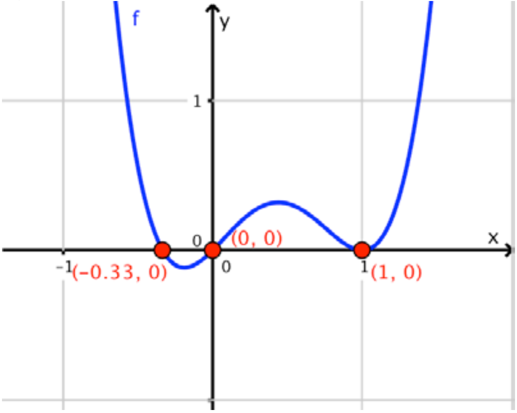
$x=0$ tai $x-1=0$ tai $3x+1=0$

$x=1$

$3x=-1$

$x=-\frac{1}{3}$

b)



Vastaus: $x=-\frac{1}{3}$, $x=0$ tai $x=1$

298

a) $-14x^2 - 8x = 0$

$2x(-7x - 4) = 0$

$2x = 0$ tai $-7x - 4 = 0$

$x = 0$ $\quad -7x = 4$

$$x = -\frac{4}{7}$$

b) $6x^2 = x$

$6x^2 - x = 0$

$x(6x - 1) = 0$

$x = 0$ tai $6x - 1 = 0$

$6x = 1$

$$x = \frac{1}{6}$$

c) $x^3 - 16x = 0$

$x(x^2 - 16) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = -4$ tai $x = 4$

d) $36x^6 = x^4$

$36x^6 - x^4 = 0$

$x^4(36x^2 - 1) = 0$

$x^4 = 0$ tai $36x^2 - 1 = 0$

$x = 0$ $36x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{36}$

$x = -\frac{1}{6}$ tai $x = \frac{1}{6}$

Vastaus: a) $x = -\frac{4}{7}$ tai $x = 0$ b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{6}$

c) $x = -4$, $x = 0$ tai $x = 4$ d) $x = -\frac{1}{6}$, $x = 0$ tai $x = \frac{1}{6}$

299

a) $x^3 + 3x^2 - 28x = 0$

$x(x^2 + 3x - 28) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 + 3x - 28 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 11}{2} = -7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 11}{2} = 4$$

b) $4x^3 - x^2 = 5x$

$4x^3 - x^2 - 5x = 0$

$x(4x^2 - x - 5) = 0$

$x = 0$ tai $4x^2 - x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8}$$

$$x = \frac{1 - 9}{8} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 + 9}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Vastaus: a) $x = -7$, $x = 0$ tai $x = 4$ b) $x = -1$, $x = 0$ tai $x = \frac{5}{4}$

300

a) $5x^3 - 3x = 18 - 30x^2$

$$5x^3 + 30x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$5x^2(x+6) - 3(x+6) = 0$$

$$(5x^2 - 3)(x+6) = 0$$

$5x^2 - 3 = 0$ tai $x + 6 = 0$

$5x^2 = 3$ $\qquad$ $x = -6$

$$x^2 = \frac{3}{5}$$

$x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ tai $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $x^9 - 3x^5 + x^4 - 3 = 0$

$$x^5(x^4 - 3) + 1 \cdot (x^4 - 3) = 0$$

$$(x^5 + 1)(x^4 - 3) = 0$$

$x^5 + 1 = 0$ tai $x^4 - 3 = 0$

$x^5 = -1$ $x^4 = 0$

$x = -1$ $x = \sqrt[4]{3}$ tai $x = -\sqrt[4]{3}$

Vastaus: a) $x = –6$, $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ tai $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ $x = 4$

b) $x = -\sqrt[4]{3}$, $x = –1$ tai $x = \sqrt[4]{3}$

301

$$x^4 + 5x^2 - 6 = 0$$

$$(x^2)^2 + 5x^2 - 6 = 0 \quad \Big| \text{ sijoitetaan } x^2 = t$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$t = \frac{-5 - 7}{2} = -6 \quad \text{tai} \quad t = \frac{-5 + 7}{2} = 1$$

Ratkaistaan muuttuja x.

$x^2 = -6$ tai $x^2 = 1$

ei ratkaisua $x = 1$ tai $x = -1$

Vastaus: $x = -1$ tai $x = 1$

302

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ | sijoitetaan $x^2 = t$

$4t^2 - 5t + 1 = 0$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$t = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$ tai $t = \frac{5+3}{8} = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2}$ tai $x = -\frac{1}{2}$

$x^2 = 1$

$x = 1$ tai $x = -1$

b) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ | Sijoitetaan $x^2 = t$.

$t^2 - 7t + 12 = 0$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$t = \frac{7-1}{2} = 3$ tai $t = \frac{7+1}{2} = 4$

$x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$ tai $x = -\sqrt{3}$

$x^2 = 4$

$x = 2$ tai $x = -2$

c) $x^4+6x^2+16=0$ | Sijoitetaan $x^2=t$.

$t^2+6t+16=0$

$$t=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=\frac{-6\pm\sqrt{-28}}{2}$$

Ei ratkaisua.

Vastaus: a) $x = -1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ tai $x = 1$

b) $x = -2$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ tai $x = 2$

c) ei ratkaisua

303

a) Luvun x neljäs potenssi: x^4
Luvun x neliö: x^2

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^4 = 3x^2$$

$$x = -\sqrt{3},\quad x = 0 \text{ tai } x = \sqrt{3}$$

b) Luvun x viides potenssi: x^5
Luvun x kuutio: x^3
Luvun x kuution ja itse luvun keskiarvo: $\dfrac{x^3 + x}{2}$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^5 = \frac{x^3 + x}{2}$$

$$x = -1,\quad x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Vastaus: a) Luvut $\sqrt{3}$, 0 ja $\sqrt{3}$
b) Luvut –1, 0 ja 1

304

Merkitään ensimmäistä lukua kirjaimella x. Kaksi seuraavaa kokonaislukua ovat $x + 1$ ja $x + 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x(x+1)(x+2) = x + (x+1) + (x+2)$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 3x + 3$$

$x = -3$, $x = -1$ tai $x = 1$

Koska ensimmäisen luvun täytyy olla positiivinen, on $x = 1$.
Siis luvut ovat 1, 2 ja 3.

Vastaus: Luvut 1, 2 ja 3.

HUOM:
Yhtälöä ei välttämättä tarvitse sieventää ennen ratkaisemista.

305

a) Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenien erotus on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$(x^2+1)-x=x^3-(x^2+1)$$

$$x^2+1-x=x^3-x^2-1$$

$$-x^3+2x^2-x+2=0$$

$$x=2$$

b) Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenien suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^3+3}{x^2+1}$$

$$x(x^3+3)=(x^2+1)^2$$

$$x^4+3x=x^4+2x^2+1$$

$$2x^2-3x+1=0$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x=1$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x=\frac{1}{2}$ tai $x=1$

HUOM:
Yhtälöä ei välttämättä tarvitse sieventää ennen ratkaisemista.

306

Määritetään lukujonon 4 ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$a_1 = 6$

$a_2 = q \cdot 6 - 3 = 6q - 3$

$a_3 = q \cdot (6q - 3) - 3 = 6q^2 - 3q - 3$

$a_4 = q \cdot (6q^2 - 3q - 3) - 3 = 6q^3 - 3q^2 - 3q - 3$

Toisaalta $a_4 = -3$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$6q^3 - 3q^2 - 3q - 3 = -3$$

$$6q^3 - 3q^2 - 3q = 0$$

$q = -\frac{1}{2}$, $q = 0$ tai $q = 1$

Ratkaistaan jokaista q:n arvoa vastaava jonon 5. jäsen.

$q = -\frac{1}{2}: \quad a_5 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) - 3 = -\frac{3}{2}$

$q = 0: \quad a_5 = 0 \cdot (-3) - 3 = -3$

$q = 1: \quad a_5 = 1 \cdot (-3) - 3 = -6$

Vastaus: $q = -\frac{1}{2}$, $a_5 = -\frac{3}{2}$

$q = 0$, $a_5 = -3$

$q = 1$, $a_5 = -6$

307

Määritetään lukujonon 4 ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$a_1 = -12,6$

$a_2 = q^2 \cdot (-12,6) + 5,2 = -12,6q^2 + 5,2$

$a_3 = q^2 \cdot (-12,6q^2 + 5,2) + 5,2 = -12,6q^4 + 5,2q^2 + 5,2$

$a_4 = q^2 \cdot (-12,6q^4 + 5,2q^2 + 5,2) + 5,2 = -12,6q^6 + 5,2q^4 + 5,2q^2 + 5,2$

Toisaalta $a_4 = 5,2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$-12,6q^6 + 5,2q^4 + 5,2q^2 + 5,2 = 5,2$$

$$-12,6q^6 + 5,2q^4 + 5,2q^2 = 0$$

$q = -0,9386... \approx -0,94, \quad q = 0 \quad \text{tai} \quad q = 0,9386... \approx 0,94$

Vastaus: $q \approx -0,94, \quad q = 0 \quad \text{tai} \quad q \approx 0,94$

308

$$36x^3 + ax^2 + 16x = 0$$

$$x(36x^2 + ax + 16) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 36x^2 + ax + 16 = 0$$

Koska $x = 0$ on aina yhtälön juuri, niin yhtälöllä on tasan kaksi juurta, kun toisen asteen yhtälöllä $36x^2 + ax + 16 = 0$ on tasan yksi juuri ($x = 0$ ei ole yhtälön $36x^2 + ax + 16 = 0$ juuri millään a:n arvolla).

Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = a^2 - 4 \cdot 36 \cdot 16 = a^2 - 2304$$

Toisen asteen yhtälöllä on tasan yksi juuri, kun $D = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$a^2 - 2304 = 0$$

$$a = -48 \ \text{tai} \ a = 48$$

Muodostetaan saatuja a:n arvoja vastaavat yhtälöt ja ratkaistaan juuret.

$a = –48: \quad 36x^2 - 48x + 16 = 0$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{2}{3}$$

$a = 48: \quad 36x^2 + 48x + 16 = 0$

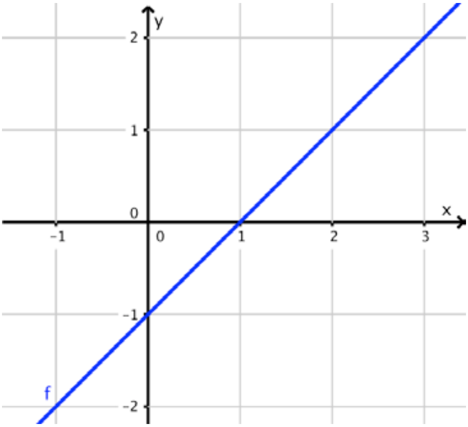
$$x = 0 \text{ tai } x = -\frac{2}{3}$$

Vastaus: Kun a = –48 juuret ovat $x = 0$ tai $x = \frac{2}{3}$.

Kun a = 48, $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 0$.

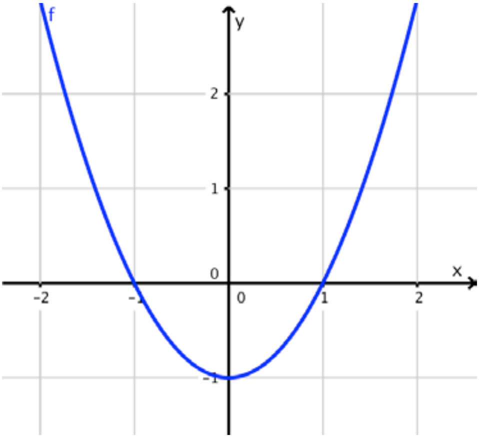
309

a)



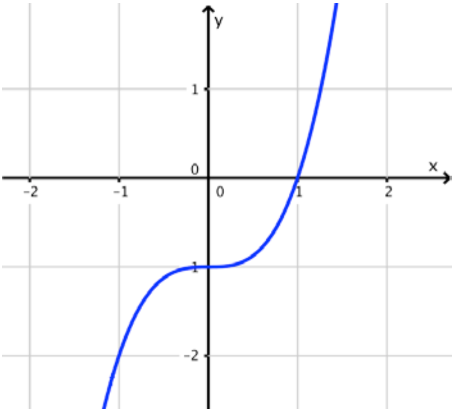
Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$.

b)



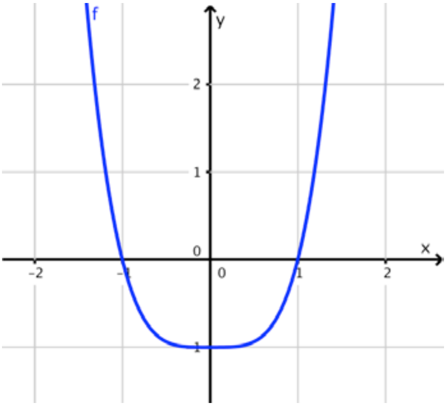
Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

c)



Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$.

d)

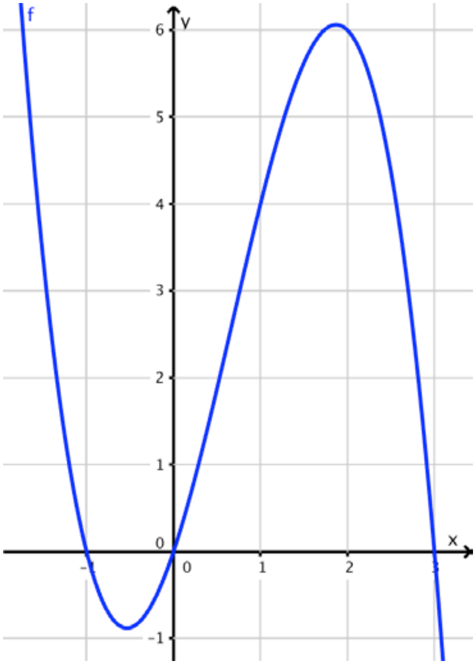


Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

Vastaus:	a) $x > 1$	b) $x < -1$ tai $x > 1$
	c) $x > 1$	d) $x < -1$ tai $x > 1$

310

a)



Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-1 < x < 0$ tai $x > 3$.

b)

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-2 < x < -1$ tai $0 < x < 2$.

Vastaus: a) $-1 < x < 0$ tai $x > 3$ b) $-2 < x < -1$ tai $0 < x < 2$

311

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 + x^2 - 6x > 0$$

$$x(x^2 + x - 6) > 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

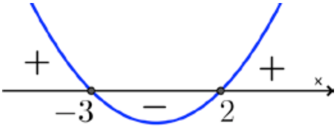
Tekijä x:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $x^2 + x - 6$: Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{2} = 2$$



Laaditaan polynomifunktion $x^3 + x^2 - 6x$ merkkikaavio.

x	–	–	+	+
$x^2 + x - 6$	+	–	–	+
$x(x^2 + x - 6)$	–	+	–	+

x

–3 0 2

Epäyhtälö $x^3 + x^2 - 6x > 0$ toteutuu, kun $-3 < x < 0$ tai $x > 2$.

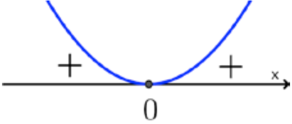
b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 - 5x^2 > 0$$

$$x^2(x-5) > 0$$

Tekijä x^2:
Nollakohta $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

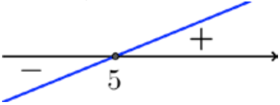


Tekijä $x - 5$:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $x^3 - 5x^2$ merkkikaavio.

x^2	+	+	+
$x-5$	–	–	+
$x^2(x-5)$	–	–	+

x

0 5

Epäyhtälö $x^3 - 5x^2 > 0$ toteutuu, kun $x > 5$.

Vastaus: a) $-3 < x < 0$ tai $x > 2$ b) $x > 5$

312

a) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$x^3+7x^2-8x<0$$

$$x(x^2+7x-8)<0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

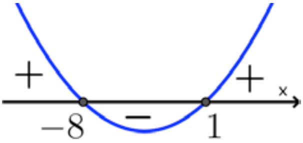
Tekijä x^2+7x-8:

$$x^2+7x-8=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}=\frac{-7\pm9}{2}$$

$$x=\frac{-7-9}{2}=-8 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-7+9}{2}=1$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion x^3+7x^2-8x merkkikaavio.

		–8		0		1	
x	–		–		+		+
$x^2 + 7x – 8$	+		–		–		+
$x(x^2+7x-8)$	–		+		–		+

Epäyhtälö $x^3+7x^2-8x<0$ toteutuu, kun $x < –8$ tai $0 < x < 1$.

b) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

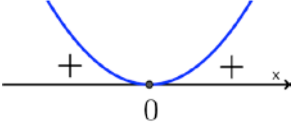
$$-3x^4 + 12x^2 < 0$$

$$3x^2(-x^2 + 4) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä $3x^2$:

Nollakohta $x = 0$. Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

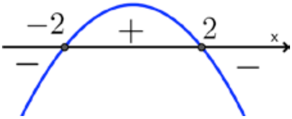


Tekijä $-x^2 + 4$: Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

$$-x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$



Laaditaan polynomifunktion $-3x^4 + 12x^2$ merkkikaavio.

$3x^2$	+	+	+	+
$-x^2 + 4$	–	+	+	–
$3x^2(-x^2 + 4)$	–	+	+	–

x

–2 0 2

Epäyhtälö $-3x^4 + 12x^2 < 0$ toteutuu, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

Vastaus: a) $x < -8$ tai $0 < x < 1$ b) $x < -2$ tai $x > 2$

313

a) Siirretään epäyhtälön termit vasemmalle puolelle ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$8x^3-2x^2>x$$

$$8x^3-2x^2-x>0$$

$$x(8x^2-2x-1)>0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x:
Nollakohta on $x=0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x<0$ ja positiivinen, kun $x>0$.

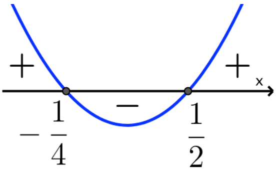
Tekijä $8x^2-2x-1$:

$$8x^2-2x-1=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 8\cdot(-1)}}{2\cdot 8}=\frac{2\pm 6}{16}$$

$$x=\frac{2-6}{16}=-\frac{1}{4}\quad \text{tai}\quad x=\frac{2+6}{16}=\frac{1}{2}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $8x^3-2x^2-x$ merkkikaavio.

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$8x^2-2x-1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x(8x^2-2x-1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

x

$-\frac{1}{4}$ $\quad 0 \quad$ $\frac{1}{2}$

Epäyhtälö $8x^3-2x^2-x>0$ toteutuu, kun $-\frac{1}{4}<x<0$ tai $x>\frac{1}{2}$.

b) Siirretään epäyhtälön termit vasemmalle puolelle ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

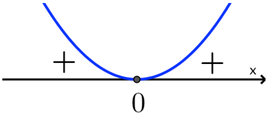
$$x^4 + 2x^3 \geq -x^2$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

Tekijä x^2:
Nollakohta $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Tekijä $x^2 + 2x + 1$:

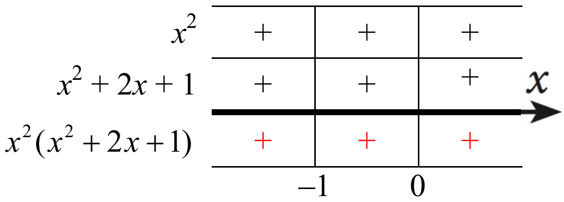
Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

Laaditaan polynomifunktion $x^4 + 2x^3 + x^2$ merkkikaavio.



x^2	+	+	+
$x^2 + 2x + 1$	+	+	+
$x^2(x^2 + 2x + 1)$	+	+	+

Epäyhtälö $x^4 + 2x^3 + x^2 \geq 0$ toteutuu kaikilla x:n arvoilla.

Vastaus: a) $-\frac{1}{4} < x < 0$ tai $x > \frac{1}{2}$

b) Epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.

314

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$-x^3+3x^2+4x-12>0$$

$$-x^2(x-3)+4(x-3)>0$$

$$(-x^2+4)(x-3)>0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

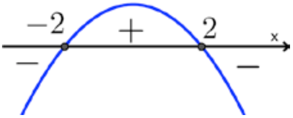
Tekijä $-x^2+4$:

$$-x^2+4=0$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

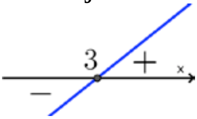


Tekijä $x-3$:

$$x-3=0$$

$$x=3$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $-x^3+3x^2+4x-12$ merkkikaavio.

$-x^2+4$	–	+	–	–
$x-3$	–	–	–	+
$(-x^2+4)(x-3)$	+	–	+	–
x		–2	2	3

Epäyhtälö $-x^3+3x^2+4x-12>0$ toteutuu, kun
$x<-2$ tai $2<x<3$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$2x^3 + 6x^2 < 2x + 6$$

$$2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 < 0$$

$$2x^2(x+3) - 2(x+3) < 0$$

$$(2x^2 - 2)(x+3) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

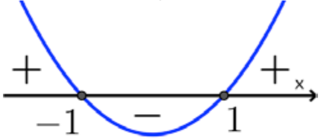
Tekijä $2x^2 - 2$:

$$2x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

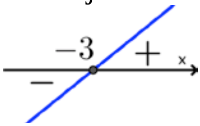


Tekijä $x + 3$:

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$ merkkikaavio.

$2x^2 - 2$	+	+	–	+
$x + 3$	–	+	+	+
$(2x^2 - 2)(x+3)$	–	+	–	+
x		–3	–1	1

Epäyhtälö $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 < 0$ toteutuu,
kun $x < -3$ tai $-1 < x < 1$.

Vastaus: a) $x < -2$ tai $2 < x < 3$ b) $x < -3$ tai $-1 < x < 1$

315

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^3 - 6x^2 \leq 3x - 18$$

$$x^3 - 6x^2 - 3x + 18 \leq 0$$

$$x^2(x-6) - 3(x-6) \leq 0$$

$$(x^2-3)(x-6) \leq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

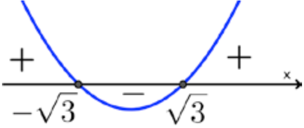
Tekijä $x^2 - 3$:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

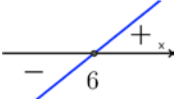


Tekijä $x - 6$:

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $x^3 - 6x^2 - 3x + 18$ merkkikaavio.

$x^2 - 3$	+	–	+	+
$x - 6$	–	–	–	+
$(x^2-3)(x-6)$	–	+	–	+

$-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ 6

Epäyhtälö $x^3 - 6x^2 - 3x + 18 \leq 0$ toteutuu,
kun $x \leq -\sqrt{3}$ tai $\sqrt{3} \leq x \leq 6$

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$5x^3 + 5x \geq 6x^2 + 6$$

$$5x^3 - 6x^2 + 5x - 6 \geq 0$$

$$x^2(5x-6) + 1 \cdot (5x-6) \geq 0$$

$$(x^2+1)(5x-6) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

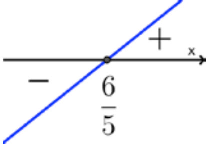
Tekijä $x^2 + 1 > 0$ aina.

Tekijä $5x - 6$:

$5x - 6 = 0$

$x = \frac{6}{5}$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $5x^3 - 6x^2 + 5x - 6$ merkkikaavio.

$x^2 + 1$	+	+
$5x - 6$	–	+
$(x^2+1)(5x-6)$	–	+

x

$\frac{6}{5}$

Epäyhtälö $5x^3 - 6x^2 + 5x - 6 \geq 0$ toteutuu, $x \geq \frac{6}{5}$.

Vastaus: a) $x \leq -\sqrt{3}$ tai $\sqrt{3} \leq x \leq 6$ b) $x \geq \frac{6}{5}$

316

a) Ratkaistaan funktion $f(x) = x^4 + 8x$ nollakohdat.

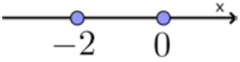
$$x^4 + 8x = 0$$

$$x(x^3 + 8) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$



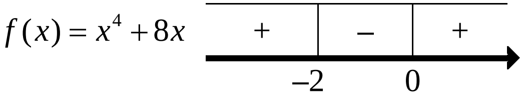
Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

$$f(-10) = (-10)^4 + 8 \cdot (-10) = 10\,000 - 80 = 9920 > 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 + 8 \cdot (-1) = 1 - 8 = -6 < 0$$

$$f(1) = 1^4 + 8 \cdot 1 = 9 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^4 + 8x < 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 0$.

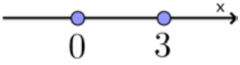
b) Ratkaistaan funktion $g(x) = x^5 - 3x^4$ nollakohdat.

$$x^5 - 3x^4 = 0$$

$$x^4(x-3) = 0$$

$x^4 = 0$ tai $x - 3 = 0$

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x = 3$



Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion g arvo.

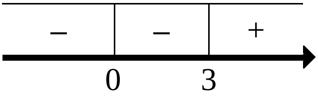
$$g(-1) = (-1)^5 - 3\cdot(-1)^4 = -1 - 3 = -4 < 0$$

$$g(1) = 1^5 - 3\cdot 1^4 = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$g(10) = 10^5 - 3\cdot 10^4 = 100\,000 - 30\,000 = 70\,000 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$g(x) = x^5 - 3x^4$



Epäyhtälö $x^5 - 3x^4 < 0$ toteutuu, kun $x < 0$ tai $0 < x < 3$.

c) Ratkaistaan funktion $h(x) = x^6 - 9x^4$ nollakohdat.

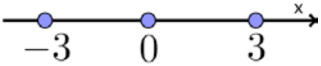
$$x^6 - 9x^4 = 0$$

$$x^4(x^2 - 9) = 0$$

$x^4 = 0$ tai $x^2 - 9 = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x^2 = 9$

$x = \pm 3$



Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion h arvo.

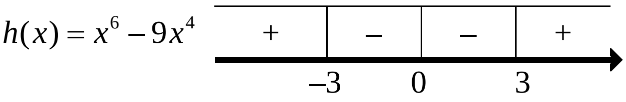
$$h(-10) = (-10)^6 - 9 \cdot (-10)^4 = 1\,000\,000 - 90\,000 = 910\,000 > 0$$

$$h(-1) = (-1)^6 - 9 \cdot (-1)^4 = 1 - 9 = -8 < 0$$

$$h(1) = 1^6 - 9 \cdot 1^4 = 1 - 9 = -8 < 0$$

$$h(10) = 10^6 - 9 \cdot 10^4 = 1\,000\,000 - 90\,000 = 910\,000 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.



Epäyhtälö $x^6 - 9x^4 > 0$ toteutuu, kun $x < -3$ tai $x > 3$.

Vastaus: a) $-2 < x < 0$ b) $x < 0$ tai $0 < x < 3$ c) $x < -3$ tai $x > 3$

317

Luvun x kuutio: x^3

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^3 > x$$

$$x^3 - x > 0$$

$$-1 < x < 0 \quad \text{tai} \quad x > 1$$

Vastaus: Luvut, jotka toteuttavat ehdon $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

318

Luvun x kuutio: x^3
Luvun x neliö: x^2

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$x^3 < x^2$$

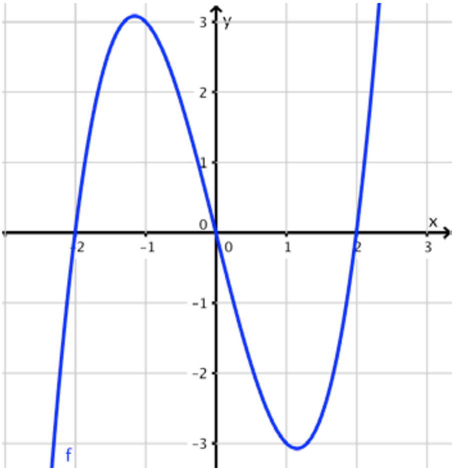
$$x^3 - x^2 < 0$$

$$x < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < x < 1$$

Vastaus: Luvut, jotka toteuttavat ehdon $x < 0$ tai $0 < x < 1$.

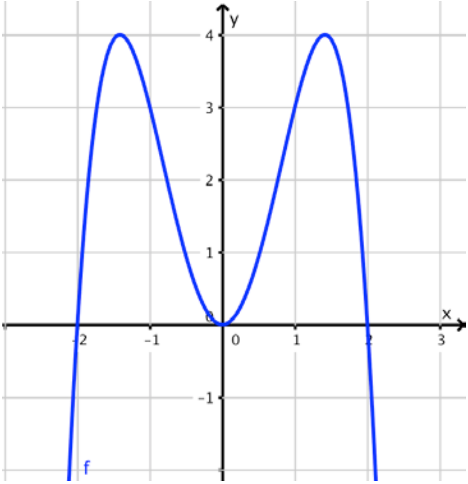
319

a)



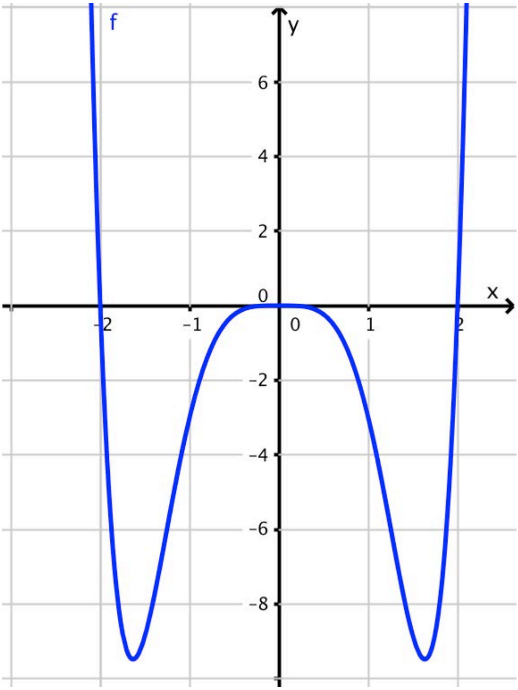
Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$.

b)



Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $-2 \leq x \leq 2$.

c)



Funktion arvot ovat epänegatiivisia, kun $x \leq -2$, $x = 0$ tai $x \geq 2$.

Vastaus: a) $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$
b) $-2 \leq x \leq 2$
c) $x \leq -2$, $x = 0$ tai $x \geq 2$

320

a) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$2x^3 - 9x^2 - 11x < 0$$

$$x(2x^2 - 9x - 11) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $2x^2 - 9x - 11$:

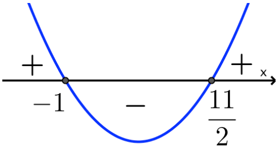
$$2x^2 - 9x - 11 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-11)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{9 \pm 13}{4}$$

$$x = \frac{9-13}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{9+13}{4} = \frac{11}{2}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $2x^3 - 9x^2 - 11x$ merkkikaavio.

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x^2 - 9x - 11$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x(2x^2 - 9x - 11)$	$-$	$+$	$-$	$+$

-1 $\quad 0 \quad$ $\frac{11}{2}$

Epäyhtälö $2x^3 - 9x^2 - 11x < 0$ toteutuu,

kun $x < -1$ tai $0 < x < \dfrac{11}{2}$

b) Muodostetaan epäyhtälö ja jaetaan vasen puoli tekijöihin.

$$x^4 - 5x^3 < 0$$

$$x^3(x-5) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

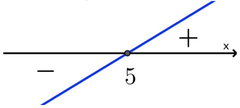
Tekijä x^3:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $x - 5$:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $x^4 - 5x^3$ merkkikaavio.

x^3	−	+	+
$x-5$	−	−	+
$x^3(x-5)$	+	−	+

$0 \qquad 5$

Epäyhtälö $x^4 - 5x^3 < 0$ toteutuu, kun $0 < x < 5$.

Vastaus: a) $x < -1$ tai $0 < x < \frac{11}{2}$ b) $0 < x < 5$

321

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

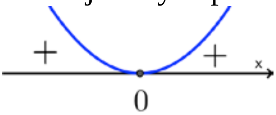
$$x^5 - 8x^2 \geq 0$$

$$x^2(x^3 - 8) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x^2:
Nollakohta on $x = 0$.

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



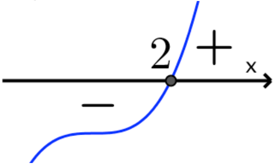
Tekijä $x^3 - 8$:

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Kuvaaja on nouseva kolmannen asteen käyrä.



Laaditaan polynomifunktion $x^5 - 8x^2$ merkkikaavio.

x^2	+	+	+
$x^3 - 8$	–	–	+
$x(x^3 - 8)$	–	–	+

0 2

Epäyhtälö $x^5 - 8x^2 \geq 0$ toteutuu, kun $x = 0$ tai $x \geq 2$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$2x^2+9x \geq x^3$$

$$-x^3+2x^2+9x \geq 0$$

$$x(-x^2+2x+9) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $-x^2+2x+9$:

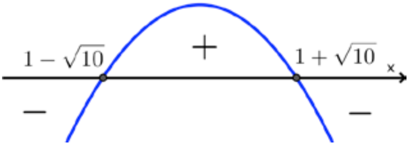
$$-x^2+2x+9=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 9}}{2\cdot(-1)}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 10}}{-2}$$

$$=\frac{-2\pm 2\sqrt{10}}{-2}=1\pm\sqrt{10}$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Laaditaan polynomifunktion $x^4 - 5x^3$ merkkikaavio.

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$-x^2+2x+9$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x^3(x-5)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$1-\sqrt{10}$ 0 $1+\sqrt{10}$

Epäyhtälö $-x^3+2x^2+9x \geq 0$ toteutuu,
kun $x \leq 1-\sqrt{10}$ tai $0 \leq x \leq 1+\sqrt{10}$.

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x \geq 2$
b) $x \leq 1-\sqrt{10}$ tai $0 \leq x \leq 1+\sqrt{10}$

322

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$-x^3 + 7x^2 + 18x \leq 0$$

$$x(-x^2 + 7x + 18) \leq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

Tekijä $-x^2 + 7x + 18$:

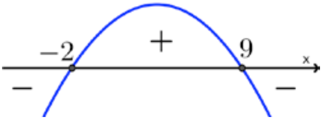
Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

$$-x^2 + 7x + 18 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{-2} = \frac{-7 \pm 11}{-2}$$

$$x = \frac{-7 - 11}{-2} = 9 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7 + 11}{-2} = -2$$



Laaditaan polynomifunktion $-x^3+7x^2+18x$ merkkikaavio.

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$-x^2+7x+18$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x(-x^2+7x+18)$	$+$	$-$	$+$	$-$

-2 0 9

Epäyhtälö $-x^3+7x^2+18x \le 0$ toteutuu, kun $-2 \le x \le 0$ tai $x \ge 9$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$x^7 - 25x^5 > 0$$

$$x^5(x^2 - 25) > 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä x^5:
Nollakohta on $x = 0$. Tekijän arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$.

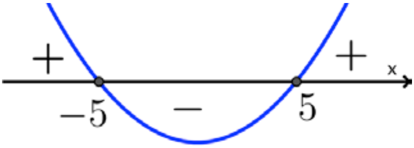
Tekijä $x^2 - 25$:

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$



Laaditaan polynomifunktion $x^7 - 25x^5$ merkkikaavio.

x^5	–	–	+	+
$x^2 - 25$	+	–	–	+
$x^5(x^2 - 25)$	–	+	–	+

–5 0 5

Epäyhtälö $x^7 - 25x^5 > 0$ toteutuu, kun $–5 < x < 0$ tai $x > 5$.

b-kohta toisin:

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^7 - 25x^5$ nollakohdat.

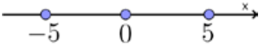
$$x^7 - 25x^5 = 0$$

$$x^5(x^2 - 25) = 0$$

$x^5 = 0$ tai $x^2 - 25 = 0$

$x = 0$ $\qquad x^2 = 25$

$x = 5$ tai $x = -5$



Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

$$f(-10) = (-10)^7 - 25\cdot(-10)^5 = -10\,000\,000 + 2\,500\,000 = -7\,500\,000 < 0$$

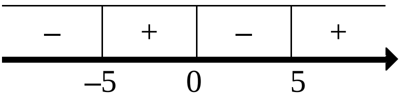
$$f(-1) = (-1)^7 - 25\cdot(-1)^5 = -1 + 25 = 24 > 0$$

$$f(1) = 1^7 - 25\cdot10^5 = 1 - 25 = -24 < 0$$

$$f(10) = 10^7 - 25\cdot10^5 = 10\,000\,000 - 2\,500\,000 = 7\,500\,000 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$f(x) = x^7 - 25x^5$



Epäyhtälö $x^7 - 25x^5 > 0$ toteutuu, kun $-5 < x < 0$ tai $x > 5$.

Vastaus: a) $-2 \le x \le 0$ tai $x \ge 9$ b) $-5 < x < 0$ tai $x > 5$

323

a) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$9x^3 - 45x^2 < x - 5$$

$$9x^3 - 45x^2 - x + 5 < 0$$

$$9x^2(x-5) - 1 \cdot (x-5) < 0$$

$$(9x^2 - 1)(x-5) < 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

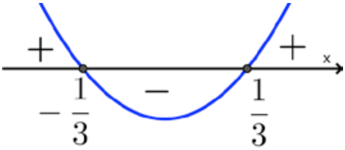
Tekijä $9x^2 - 1$:

$$9x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \pm\frac{1}{3}$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

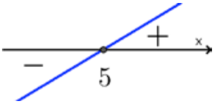


Tekijä $x - 5$:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Kuvaaja on nouseva suora.



Laaditaan polynomifunktion $9x^3 - 45x^2 - x + 5$ merkkikaavio.

$9x^2 - 1$	+		–		+		+
$x - 5$	–		–		–		+
$(9x^2 - 1)(x - 5)$	–		+		–		+
		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		5	

Epäyhtälö $9x^3 - 45x^2 - x + 5 < 0$ toteutuu,

kun $x < -\frac{1}{3}$ tai $\frac{1}{3} < x < 5$.

b) Jaetaan epäyhtälön vasen puoli tekijöihin.

$$3x^4 - 18x^3 - 3x + 18 \geq 0$$

$$3x^3(x-6) - 3(x-6) \geq 0$$

$$(3x^3 - 3)(x-6) \geq 0$$

Ratkaistaan tekijöiden nollakohdat ja päätellään merkit.

Tekijä $3x^3 - 3$:

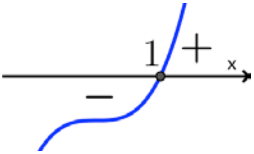
Kuvaaja on nouseva kolmannen asteen käyrä.

$$3x^3 - 3 = 0$$

$$3x^3 = 3$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

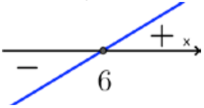


Tekijä $x - 6$:

Kuvaaja on nouseva suora.

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$



Laaditaan polynomifunktion $3x^4 - 18x^3 - 3x + 18$ merkkikaavio.

$3x^3 - 3$	−	+	+
$x - 6$	−	−	+
$(3x^3 - 3)(x-6)$	+	−	+

1 6

Epäyhtälö $3x^4 - 18x^3 - 3x + 18 \geq 0$ toteutuu, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 6$.

Vastaus: a) $x < -\frac{1}{3}$ tai $\frac{1}{3} < x < 5$ b) $x \leq 1$ tai $x \geq 6$

324

a) $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)=0$

$x-10=0$ tai $x^2-9=0$ tai $x^3-8=0$

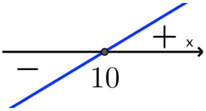
$x=10$ $\quad x^2=9$ $\quad x^3=8$

$x=3$ tai $x=-3$ $\quad x=\sqrt[3]{8}=2$

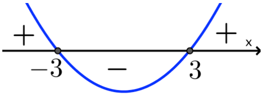
Siis $x=–3$, $x=2$, $x=3$ tai $x=10$.

b) Päätellään tekijöiden merkit hahmottelemalla niiden kuvaajat.

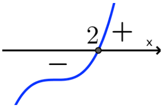
$x-10$



x^2-9



x^3-8



Laaditaan funktion $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)$ merkkikaavio.

$x-10$	–	–	–	–	+
x^2-9	+	–	–	+	+
x^3-8	–	–	+	+	+
$(x-10)(x^2-9)(x^3-8)$	+	–	+	–	+

–3 2 3 10

Epäyhtälö $(x-10)(x^2-9)(x^3-8)<0$ toteutuu,
kun $–3<x<2$ tai $3<x<10$.

Vastaus: a) $x=–3$, $x=2$, $x=3$ tai $x=10$
b) $–3<x<2$ tai $3<x<10$

325

a) $$x^2(3x^2+x-2)=3x^2+x-2$$

$$x^2(3x^2+x-2)-(3x^2+x-2)=0$$

$$(x^2-1)(3x^2+x-2)=0$$

$x^2-1=0$ tai $3x^2+x-2=0$

$x^2=1$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm5}{6}$$

$x=\pm1$

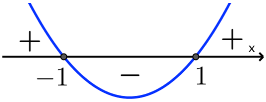
$x=\frac{-1-5}{6}=-1$ tai $x=\frac{-1+5}{6}=\frac{2}{3}$

Siis $x=-1$, $x=\frac{2}{3}$ tai $x=1$.

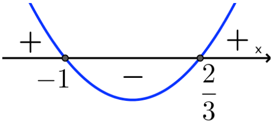
b) Epäyhtälö $x^2(3x^2+x-2) > 3x^2+x-2$ on yhtä pitävä epäyhtälön $(x^2-1)(3x^2+x-2) > 0$ kanssa a-kohdan perusteella.

Päätellään tekijöiden merkit hahmottelemalla niiden kuvaajat.

x^2-1



$3x^2+x-2$



Laaditaan funktion $(x^2-1)(3x^2+x-2)$ merkkikaavio.

x^2-1	+	−	−	+
$3x^2+x-2$	+	−	+	+
$(x^2-1)(3x^2+x-2)$	+	+	−	+
	-1	$\frac{2}{3}$	1	

Epäyhtälö $(x^2-1)(3x^2+x-2) > 0$ toteutuu,

kun $x < -1$, $-1 < x < \dfrac{2}{3}$ tai $x > 1$.

Vastaus: a) $x = -1$, $x = \dfrac{2}{3}$ tai $x = 1$

b) $x < -1$ tai $-1 < x < \dfrac{2}{3}$ tai $x > 1$

326

a) Ratkaistaan funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ nollakohdat.

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \Big| \text{sijoitetaan } x^2 = t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$t = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{3+5}{2} = 4$$

$x^2 = -1$ tai $x^2 = 4$

ei ratkaisua $x = 2$ tai $x = -2$

Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion f arvo.

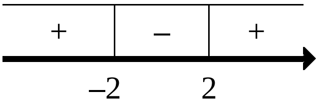
$$f(-10) = (-10)^4 - 3 \cdot (-10)^2 - 4 = 10\,000 - 300 - 4 = 9696 > 0$$

$$f(0) = 0^4 - 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0$$

$$f(10) = 10^4 - 3 \cdot 10^2 - 4 = 10\,000 - 300 - 4 = 9696 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$



Epäyhtälö $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$ toteutuu, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

b) Ratkaistaan funktion $g(x)=3x^4-5x^2-2$ nollakohdat.

$$3x^4-5x^2-2=0 \quad \Big| \text{sijoitetaan } x^2=t$$

$$3t^2-5t-2=0$$

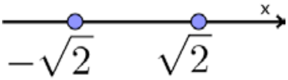
$$t=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm7}{6}$$

$$t=\frac{5-7}{6}=-\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad t=\frac{5+7}{6}=2$$

$$x^2=-\frac{1}{3} \qquad \text{tai} \quad x^2=2$$

ei ratkaisua

$$x=\sqrt{2} \ \text{ tai } \ x=-\sqrt{2}$$



Nollakohdat jakavat lukusuoran kolmeen väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion g arvo.

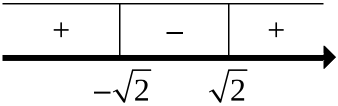
$$g(-2)=3\cdot(-2)^4-5\cdot(-2)^2-2=3\cdot16-5\cdot4-2=48-20-2=26>0$$

$$g(0)=3\cdot0^4-5\cdot0^2-2=-2<0$$

$$g(2)=3\cdot2^4-5\cdot2^2-2=3\cdot16-5\cdot4-2=48-20-2=26>0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$g(x)=3x^4-5x^2-2$



Epäyhtälö $3x^4-5x^2-2\le0$ toteutuu, kun $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

c) Ratkaistaan funktion $h(x) = x^6 - 2x^4 - 3x^2$ nollakohdat.

$$x^6 - 2x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 - 2x^2 - 3) = 0$$

$x^2 = 0$ tai $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ $\Big|$ sijoitetaan $x = t^2$

$x = 0$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

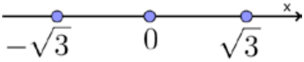
$t = \dfrac{2-4}{2} = -1$ tai $t = \dfrac{2+4}{2} = 3$

$x^2 = -1$ tai $x^2 = 3$

ei ratkaisua

$x = \sqrt{3}$ tai $x = -\sqrt{3}$

Nollakohdat jakavat lukusuoran neljään väliin. Lasketaan kultakin väliltä yksi funktion h arvo.



$$h(-10) = (-10)^6 - 2\cdot(-10)^4 - 3\cdot(-10)^2$$

$$= 1\,000\,000 - 20\,000 - 300 = 979\,700 > 0$$

$$h(-1) = (-1)^6 - 2\cdot(-1)^4 - 3\cdot(-1)^2 = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$$

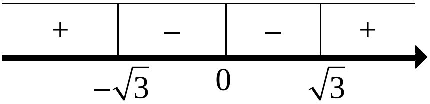
$$h(1) = 1^6 - 2\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2 = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$$

$$h(10) = 10^6 - 2\cdot 10^4 - 3\cdot 10^2$$

$$= 1\,000\,000 - 20\,000 - 300 = 979\,700 > 0$$

Kirjataan merkit merkkikaavioon.

$h(x) = x^6 - 2x^4 - 3x^2$



Epäyhtälö $x^6 - 2x^4 - 3x^2 < 0$ toteutuu, kun
$-\sqrt{3} < x < 0$ tai $0 < x < \sqrt{3}$

Vastaus:
a) $x < -2$ tai $x > 2$
b) $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$
c) $-\sqrt{3} < x < 0$ tai $0 < x < \sqrt{3}$

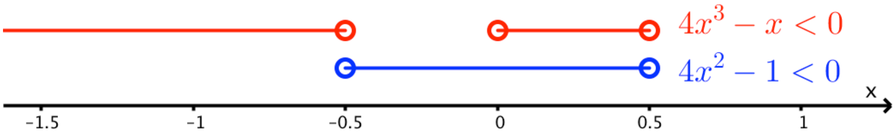
327

Ratkaistaan molemmat epäyhtälöt laskimella.

$4x^2 - 1 < 0$	$4x^3 - x < 0$
$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$	$x < -\frac{1}{2}$ tai $0 < x < \frac{1}{2}$

Esimerkiksi luku $x = -\frac{1}{4}$ toteuttaa epäyhtälön $4x^2 - 1 < 0$ mutta ei toteuta epäyhtälöä $4x^3 - x < 0$. Siis kaikki epäyhtälön $4x^2 - 1 < 0$ ratkaisut eivät toteuta epäyhtälöä $4x^3 - x < 0$.

Tilannetta voidaan havainnollistaa piirtämällä epäyhtälöiden ratkaisujoukot lukusuoralle näkyviin.



Vastaus: Eivät toteuta

328

Kirjoitetaan lukujonon kolmen ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$$a_1 = -2$$

$$a_2 = k^2 \cdot (-2) + 1 = -2k^2 + 1$$

$$a_3 = k^2(-2k^2 + 1) + 1 = -2k^3 + k^2 + 1$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan millä kertoimen k arvoilla kolmas jäsen on positiivinen.

$$a_3 > 0$$

$$-2k^3 + k^2 + 1 > 0$$

$$-1 < k < 1$$

Vastaus: $-1 < k < 1$

329

Kirjoitetaan lukujonon kolmen ensimmäisen jäsenen lausekkeet.

$$a_1 = k$$

$$a_2 = k$$

$$a_3 = \frac{a_2^3 + a_1^2}{2} = \frac{k^3 + k^2}{2}$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$a_3 > k^4$$

$$\frac{k^3 + k^2}{2} > k^4 \quad \bigg| \cdot 2$$

$$k^3 + k^2 > 2k^4$$

$$-2k^4 + k^3 + k^2 > 0$$

$$-\frac{1}{2} < k < 0 \quad \text{tai} \quad 0 < k < 1$$

Vastaus: $-\frac{1}{2} < k < 0$ tai $0 < k < 1$

HUOM:
Epäyhtälö ei välttämättä tarvitse sieventää ennen ratkaisemista.

330

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 + 1)x$$

$$= x(x^2 + ax + a^2 + 1)$$

Tekijän $x^2 + ax + a^2 + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Lasketaan toisen asteen polynomifunktion diskriminantti ja päätellään nollakohtien lukumäärä.

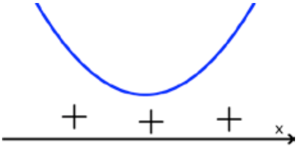
$$D = b^2 - 4ac \qquad a = 1,\ b = a \text{ ja } c = a^2 + 1$$

$$= a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 + 1)$$

$$= -3a^2 - 4$$

Koska diskriminantti $-3a^2 - 4 < 0$ kaikilla vakion a arvoilla, polynomilla $x^2 + ax + a^2 + 1$ ei ole yhtään nollakohtaa.

Siten tekijä $x^2 + ax + a^2 + 1$ on aina positiivinen



Koska tekijä $x^2 + ax + a^2 + 1$ on aina positiivinen määrää tekijä x funktion merkin.

Tekijän x arvo on negatiivinen, kun $x < 0$ ja positiivinen, kun $x > 0$. Siten $f(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) > 0$, kun $x > 0$. ☐

331

a) Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$x^2 + x - 6 = 1 \cdot \left(x - (-3)\right)\left(x - 2\right) = (x+3)(x-2)$$

b) Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x = \frac{-1-11}{2} = -6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+11}{2} = 5$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$x^2 + x - 30 = 1 \cdot \left(x - (-6)\right)\left(x - 5\right) = (x+6)(x-5)$$

c) Ratkaistaan nollakohdat.

$$-3x^2 + 6x - 3 = 0 \quad \Big| : (-3)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$-3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)(x-1) = -3(x-1)^2$$

Vastaus:
a) $(x+3)(x-2)$
b) $(x+6)(x-5)$
c) $-3(x-1)^2$

332

a) Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$25x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$x = \frac{2}{5}$$

b) Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$\begin{aligned} 25x^2 - 20x + 4 &= 25(x - \frac{2}{5})(x - \frac{2}{5}) \\ &= 5^2\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \left(5(x - \frac{2}{5})\right)^2 \\ &= (5x - 2)^2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = \frac{2}{5}$ b) $25\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = (5x - 2)^2$

333

Toisen asteen polynomilla voi olla enintään kaksi nollakohtaa. Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -2$ ja $x_2 = 3$, jos ja vain jos sen tekijät ovat

$$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$$

$$x - x_2 = x - 3.$$

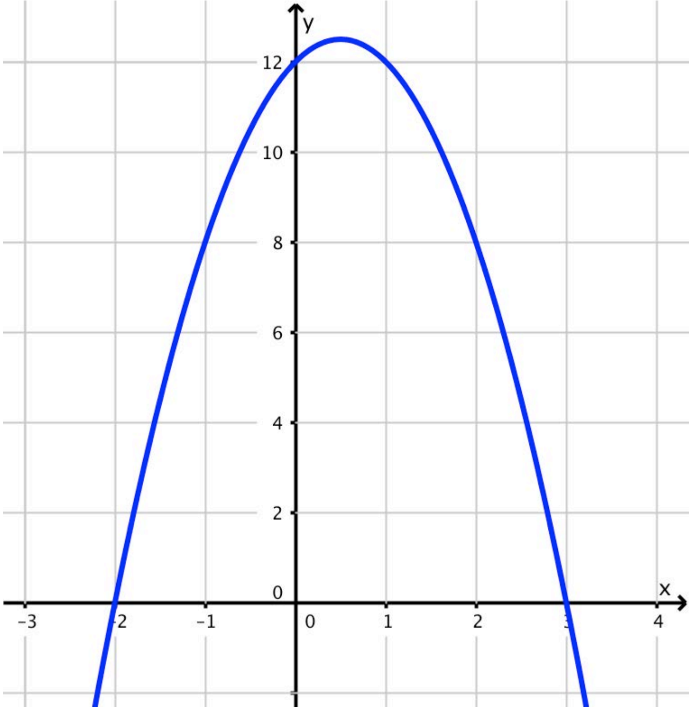
Funktion lauseke on siis muotoa $P(x) = a(x+2)(x-3)$, jossa $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$$\begin{aligned} P(0) &= 12 \\ a(0+2)(0-3) &= 12 \\ -6a &= 12 \quad \Big| : (-6) \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Siis $P(x) = -2(x+2)(x-3)$.

Kuvaaja:



Vastaus: $-2(x+2)(x-3)$

334

Toisen asteen polynomiyhtälöllä voi olla enintään kaksi juurta.

a) Nollakohdat ovat $x_1 = -6$ ja $x_2 = 1$ ja toisen asteen termin kerroin on $a = 3$.

Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\ 3\big(x - (-6)\big)\big(x - 1\big) &= 0 \\ 3(x + 6)(x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälöstä voidaan kertoa sulkeet auki, jolloin saadaan $3x^2 + 15x - 18 = 0$.

b) Ainoa nollakohta on $x_1 = -6$ ja toisen asteen termin kerroin on $a = 3$.

Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a(x - x_1)^2 &= 0 \\ 3\big(x - (-6)\big)^2 &= 0 \\ 3(x + 6)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälöstä voidaan kertoa sulkeet auki, jolloin saadaan $3x^2 + 36x + 108 = 0$.

Vastaus: a) $3(x + 6)(x - 1) = 0$ b) $3(x + 6)^2 = 0$

335

Kolmannen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kolme nollakohtaa.

Nollakohdat ovat $x_1 = -4,\ \ x_2 = 0$ ja $x_3 = 6$, joten tekijät ovat

$$x - x_1 = \left(x - (-4)\right) = (x + 4),$$

$$x - x_2 = (x - 0) = x,$$

$$x - x_3 = (x - 6).$$

Funktion lauseke on siis muotoa $a \cdot x \cdot (x + 4) \cdot (x - 6)$, missä $a \neq 0$.

Kolmannen asteen termin kerroin on 8 eli $a = 8$.

Funktion lauseke on siis $8x(x + 4)(x - 6)$.

Vastaus: $8x(x + 4)(x - 6)$

336

Kolmannen asteen polynomifunktiolla voi olla enintään kolme nollakohtaa.

Nollakohdat ovat $x_1 = -3,\ \ x_2 = 0$ ja $x_3 = \frac{1}{4}$, joten tekijät ovat

$$x - x_1 = \left(x - (-3)\right) = (x + 3),$$

$$x - x_2 = (x - 0) = x,$$

$$x - x_3 = (x - \frac{1}{4}).$$

Funktion lauseke on siis muotoa $P(x) = ax(x+3)(x-\frac{1}{4})$,

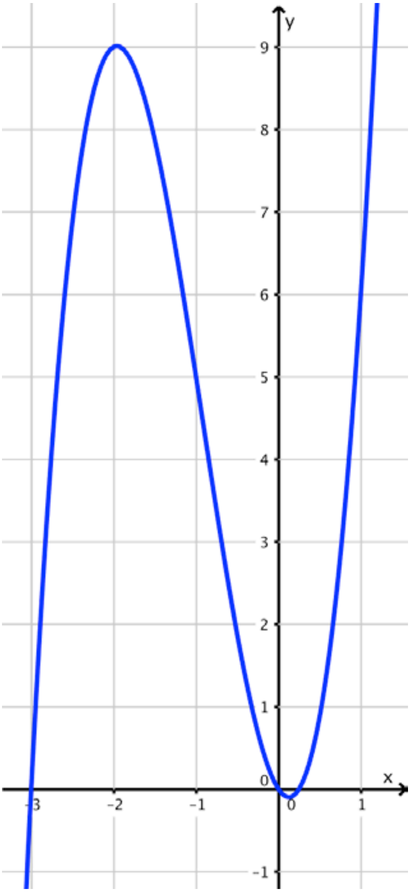
missä $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 5 \\ a(-1)(-1+3)(-1-\frac{1}{4}) &= 5 \\ \frac{5}{2}a &= 5 \qquad \Big| \cdot \frac{2}{5} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Siis $P(x) = 2x(x+3)(x-\frac{1}{4})$.

Kuvaaja:



Vastaus: $2x(x+3)(x-\frac{1}{4})$

337

Polynomilla on tekijänä $x-2$, jos ja vain jos 2 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c.

$$3x^2+12x+c=0 \quad \Big| \text{ sijoitetaan } x=2$$

$$3\cdot 2^2+12\cdot 2+c=0$$

$$36+c=0$$

$$c=-36$$

Polynomiksi saadaan $3x^2+12x-36$.

Ratkaistaan polynomin nollakohdat (laskimella).

$$3x^2+12x-36=0$$

$$x=-6 \quad \text{tai} \quad x=2$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$3x^2+12x-36=3(x-(-6))(x-2)=3(x+6)(x-2)$$

Polynomin toinen tekijä on siis $3(x+6)$

Vastaus: $c=-36$, toinen tekijä on $3(x+6)$

338

Polynomilla on tekijänä $x+12=(x-(-12))$, jos ja vain jos -12 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b.

$$x^2+bx-96=0 \quad \Big|\text{ sijoitetaan } x=-12$$

$$(-12)^2+b\cdot(-12)-96=0$$

$$b=4$$

Polynomiksi saadaan $x^2+4x-96$.

Ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$$x^2+4x-96=0$$

$$x=-12 \quad \text{tai} \quad x=8$$

Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$x^2+4x-96=1\cdot(x-(-12))(x-8)=(x+12)(x-8)$$

Polynomin toinen tekijä on siis $x-8$.

Vastaus: $b=4$, toinen tekijä on $x-8$

339

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin.

$$2x+12=2(x+6)$$

Osoittajalla on tekijä $x + 6$, jos ja vain jos -6 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c.

$$(-6)^2+3\cdot(-6)+c=0$$

$$18+c=0$$

$$c=-18$$

Osoittajaksi saadaan $x^2+3x-18$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2+3x-18=0$$

$$x=-6 \quad \text{tai} \quad x=3$$

$$x^2+3x-18=(x+6)(x-3)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2+3x-18}{2x+12}=\frac{\overset{1}{\cancel{(x+6)}}(x-3)}{2\underset{1}{\cancel{(x+6)}}}=\frac{x-3}{2}$$

Nimittäjän tekijä $x + 6$ saa arvon nolla, kun $x = –6$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq –6$.

Vastaus: $c = –18$, $\frac{x-3}{2}$, kun $x \neq –6$

340

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin.

$$6x-3=6(x-\frac{1}{2})$$

Osoittajalla on tekijä $x-\frac{1}{2}$, jos ja vain jos $\frac{1}{2}$ on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b.

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}-12=0$$

$$b=22$$

Osoittajaksi saadaan $4x^2+22x-12$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$4x^2+22x-12=0$$

$$x=-6 \quad \text{tai} \quad x=\frac{1}{2}$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

$$4x^2+22x-12=4(x+6)(x-\frac{1}{2})$$

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{4x^2+22x-12}{6x-3}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}(x+6)\,\overset{1}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}}}{\underset{3}{\cancel{6}}\,\underset{1}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}}}=\frac{2(x+6)}{3}=\frac{2x+12}{3}$$

Nimittäjän tekijä $x-\frac{1}{2}$ saa arvon nolla, kun $x=\frac{1}{2}$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x\neq\frac{1}{2}$.

Vastaus: b = 22, $\frac{2x+12}{3}$, kun $x\neq\frac{1}{2}$

HUOM:
Laskin saattaa näyttää osoittajan tekijöihin jaettuna muodossa $2(x+6)(2x-1)$.

Yllä olevassa ratkaisussa esitetty muoto voidaan sieventää kyseiseen muotoon.

$$4(x+6)(x-\frac{1}{2})=2\cdot(x+6)\cdot2\cdot(x-\frac{1}{2})=2(x+6)(2x-1)$$

Murtolauseke supistuu tällöin seuraavasti.

$$\frac{4x^2+22x-12}{6x-3}=\frac{2(x+6)\,\overset{1}{\cancel{(2x-1)}}}{3\,\underset{1}{\cancel{(2x-1)}}}=\frac{2x+12}{3}$$

341

Toisen asteen polynomilla voi olla enintään kaksi nollakohtaa. Polynomin nollakohdat ovat $x_1 = -2$ ja $x_2 = -6$, jos ja vain jos sen tekijät ovat

$$x - x_1 = x - (-2) = x + 2,$$

$$x - x_2 = x - (-6) = x + 6.$$

Funktion lauseke on siis muotoa $P(x) = a(x+2)(x+6)$, jossa $a \neq 0$.

Ratkaistaan kertoimen a arvo.

$$\begin{aligned} P(0) &= 4 \\ a(0+2)(0+6) &= 4 \\ 12a &= 4 \quad \big| :12 \\ a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Siis $P(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x+6)$.

Vastaus: $\frac{1}{3}(x+2)(x+6)$

342

Lasketaan polynomin P arvot kohdissa $-3,\ \frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{2}$.

$$P(-3)=12\cdot(-3)^3+2\cdot(-3)^2-92\cdot(-3)+30=0$$

$$P(\frac{1}{3})=12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-92\cdot(\frac{1}{3})+30=0$$

$$P(\frac{5}{2})=12\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-92\cdot(\frac{5}{2})+30=0$$

Koska $P(-3)=P(\frac{1}{3})=P(\frac{5}{2})=0$ ovat $-3,\ \frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{2}$ polynomin P nollakohtia.

Koska polynomi P on kolmannen asteen polynomi, sillä voi olla enintään kolme nollakohtaa. Muita nollakohtia ei siis voi olla.

Jaetaan polynomi P tekijöihin.

$$P(x)=12x^3+2x^2-92x+30=12\left(x-(-3)\right)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{5}{2})$$

$$=12(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{5}{2})$$

Vastaus: Ei voi olla muita nollakohtia.

$$P(x)=12x^3+2x^2-92x+30=12(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{5}{2})$$

343

a) Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$28x^2 - 11x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{7} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{4}$$

b) Jaetaan polynomi tekijöihin.

$$\begin{aligned} 28x^2 - 11x + 1 &= 28(x - \frac{1}{7})(x - \frac{1}{4}) \\ &= 4 \cdot 7(x - \frac{1}{7})(x - \frac{1}{4}) \\ &= 7(x - \frac{1}{7}) \cdot 4(x - \frac{1}{4}) \\ &= (7x - 1)(4x - 1) \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = \frac{1}{7}$ tai $x = \frac{1}{4}$

b) $28(x - \frac{1}{7})(x - \frac{1}{4}) = (7x - 1)(4x - 1)$

344

Toisen asteen yhtälöllä on kaksoisjuuri eli vain yksi juuri täsmälleen silloin, kun sen diskriminantti on nolla.

Muodostetaan yhtälön $x^2 + 18x + c = 0$ diskriminantti.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - ac \\ &= 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot c \\ &= 324 - 4c \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion c arvo.

$$\begin{aligned} 324 - 4c &= 0 \\ -4c &= -324 \\ c &= 81 \end{aligned}$$

Yhtälön kaksoisjuuri on $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2 \cdot 1} = -9$.

Kaksoisjuuren arvon voi selvittää myös ratkaisemalla yhtälön.

$$\begin{aligned} x^2 + 18x + 81 &= 0 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

Vastaus: $c = 81$, kaksoisjuuri $x = -9$

345

Toisen asteen yhtälöllä on kaksoisjuuri eli vain yksi juuri täsmälleen silloin, kun sen diskriminantti on nolla.

Muodostetaan yhtälön $ax^2 - 60x + 25 = 0$ diskriminantti.

$$
\begin{aligned}
D &= b^2 - ac \\
&= (-60)^2 - 4 \cdot a \cdot 25 \\
&= -100a + 3600
\end{aligned}
$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion c arvo.

$$
\begin{aligned}
-100a + 3600 &= 0 \\
-100a &= -3600 \\
a &= 36
\end{aligned}
$$

Yhtälön kaksoisjuuri on $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-60}{2 \cdot 36} = \dfrac{5}{6}$.

Kaksoisjuuren arvon voi selvittää myös ratkaisemalla yhtälön.

$$
\begin{aligned}
36x^2 - 60x + 25 &= 0 \\
x &= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $a = 36$, kaksoisjuuri $x = \dfrac{5}{6}$

346

Polynomilla on tekijänä $x+1=x-(-1)$, jos ja vain jos -1 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio k.

$$x^2+kx+k^2-7=0 \quad \Big| \text{ sijoitetaan } x=-1$$

$$(-1)^2+k\cdot(-1)+k^2-7=0$$

$$k^2-k-6=0$$

$$k=-2 \quad \text{tai} \quad k=3$$

Muodostetaan saatuja vakion k arvoja vastaavat polynomit, ratkaistaan niiden nollakohdat ja jaetaan polynomit tekijöihin.

1) Kun $k=-2$, niin polynomi on $x^2-2x+(-2)^2-7=x^2-2x-3$.

Nollakohdat:

$$x^2-2x-3=0$$

$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=3$$

Jaetaan tekijöihin:

$$x^2-2x-3=(x-(-1))(x-3)=(x+1)(x-3)$$

Toinen tekijä on siis $x-3$.

2) Kun $k = 3$, niin polynomi on $x^2 + 3x + 3^2 - 7 = x^2 + 3x + 2$.

Nollakohdat:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Jaetaan tekijöihin:

$$x^2 + 3x + 2 = \big(x - (-2)\big)\big(x - (-1)\big) = (x + 2)(x + 1)$$

Toinen tekijä on siis $x + 2$.

Vastaus: $k = -2$, toinen tekijä on $x - 3$
$k = 3$, toinen tekijä on $x + 2$

347

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan nimittäjä tekijöihin: $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$.

Osoittajalla pitää olla siis tekijänä $x+4$ tai $x-4$.

1) Osoittajalla on tekijä $x+4$, jos ja vain jos -4 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b.

$$(-4)^2+b\cdot(-4)-4=0$$

$$-4b+12=0$$

$$b=3$$

Osoittajaksi saadaan x^2+3x-4.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2+3x-4=0$$

$$x=-4 \quad \text{tai} \quad x=1$$

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-16}=\frac{\overset{1}{\cancel{(x+4)}}(x-1)}{\underset{1}{\cancel{(x+4)}}(x-4)}=\frac{x-1}{x-4}$$

2) Osoittajalla on tekijä $x - 4$, jos ja vain jos 4 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b.

$$4^2 + b \cdot 4 - 4 = 0$$

$$4b + 12 = 0$$

$$b = -3$$

Osoittajaksi saadaan $x^2 - 3x - 4$.

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat ja jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x+1)(x-4)$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai ryhmittelemällä.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{(x+1)\,\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{(x+4)\,\underset{1}{\cancel{(x-4)}}} = \frac{x+1}{x+4}$$

Nimittäjän tekijä $x + 4$ saa arvon nolla, kun $x = –4$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq –4$. Vastaavasti nimittäjän tekijä $x – 4$ saa arvon nolla, kun $x = 4$, joten murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq 4$.

Murtolauseke on määritelty siis vain, kun $x \neq –4$ ja $x \neq 4$.

Vastaus: Kun $b = 3$, on supistettu muoto $\frac{x-1}{x-4}$.

Kun $b = –3$, on supistettu muoto $\frac{x+1}{x+4}$.

Murtolauseke on määritelty, kun $x \neq –4$ ja $x \neq 4$.

348

Murtolauseke voidaan supistaa vain jos osoittajalla ja nimittäjällä on yhteinen tekijä.

Jaetaan osoittaja tekijöihin.

$$\begin{aligned}x^4-18x^2+81 &= (x^2)^2+2\cdot x^2\cdot(-9)+(-9)^2\\ &= (x^2-9)^2\\ &= \left((x+3)(x-3)\right)^2\\ &= (x+3)^2(x-3)^2\end{aligned}$$

Tekijöihin jaon voi tehdä myös laskimella tai nollakohtien avulla.

Nimittäjällä pitää olla siis tekijänä $x + 3$ tai $x - 3$.

1) Nimittäjällä on tekijä $x + 3$, jos ja vain jos -3 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c.

$$\begin{aligned}-3+c &= 0\\ c &= 3\end{aligned}$$

Nimittäjäksi saadaan $x+3$.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^4-18x^2+81}{x+3}=\frac{(x+3)^{\cancel{2}}(x-3)^2}{\underset{1}{\cancel{x+3}}}=(x+3)(x-3)^2$$

Nimittäjän tekijä $x + 3$ saa arvon nolla, kun $x = -3$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq -3$

2) Nimittäjällä on tekijä $x - 3$, jos ja vain jos 3 on sen nollakohta.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio c.

$$3 + c = 0$$

$$c = -3$$

Nimittäjäksi saadaan $x - 3$.

Supistetaan murtolauseke.

$$\frac{x^4 - 18x^2 + 81}{x-3} = \frac{(x+3)^2(x-3)^{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{x-3}}} = (x+3)^2(x-3)$$

Nimittäjän tekijä $x - 3$ saa arvon nolla, kun $x = 3$. Koska nollalla ei voi jakaa, murtolauseke on määritelty vain, kun $x \neq 3$

Vastaus: Kun $c = 3$, on supistettu muoto $(x+3)(x-3)^2$ ja murtolauseke on määritelty, kun $x \neq -3$.

Kun $c = -3$, on supistettu muoto $(x+3)^2(x-3)$ ja murtolauseke on määritelty, kun $x \neq 3$.

349

a) Yhtälössä $x^2 - 3x - 54 = 0$ on $a = 1,$ $b = -3$ ja $c = -54$.

Lasketaan juurten summa.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

Katso s. 98 marginaali.

b) Yhtälössä $4x^2 + 21x + 5 = 0$ on $a = 4,$ $b = 21$ ja $c = 5$.

Lasketaan juurten tulo.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

c) Yhtälön $x^2 - 3x - 180 = 0$ juurten summa on $x_1 + x_2 = -\frac{-3}{1} = 3$.

Ratkaisussa saatujen juurten summa on –15 + 12 = –3, joten ratkaisu on virheellinen.

d) Koska toinen juuri on 1, niin toinen juuri on helppo ratkaista juurien tulon avulla. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan toinen juuri.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$1 \cdot x_2 = \frac{-7}{5}$$

$$x_2 = -\frac{7}{5}$$

e) Yhtälön $9x^2 - 4x - 5 = 0$ toinen juuri on $x = 1$, sillä
$9 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = 9 - 4 - 5 = 0$.

d-kohdan perusteella yhtälön toinen juuri on yhtä suuri kuin juurien tulo. Ratkaistaan toinen juuri.

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{9} = -\frac{5}{9}$$

Vastaus: a) 3 b) $\frac{5}{4}$

d) $x = -\frac{7}{5}$ e) $x = 1$ tai $x = -\frac{5}{9}$

350

a) Polynomi $x^n - 1$ on jaollinen binomilla $x - 1$, jos ja vain jos sen nollakohtana on 1.

Sijoitetaan nollakohta $x = 1$ polynomin $x^n - 1$ lausekkeeseen.

$$x^n - 1 = 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$$

Siis $x = 1$ on polynomin $x^n - 1$ nollakohta ja täten polynomi $x^n - 1$ on jaollinen binomilla $x - 1$. □

b) Käyttämällä a-kohdan tulosta tilanteeseen, jossa $x = 55$ ja $n = 99$, saadaan, että luku $55^{99} - 1$ on jaollinen luvulla $55 - 1 = 54$.

Koska luku $55^{99} - 1$ on jaollinen luvulla 54 se ei ole alkuluku. □

351

Polynomin $x^{45}+1$ nollakohta on $x = –1$, sillä
$(-1)^{45}+1=-1+1=0$.

Täten polynomi $x^{45}+1$ on jaollinen binomilla $x + 1$.

Siis luku $123^{45}+1$ on jaollinen luvulla 123 + 1 = 124 ja ei ole alkuluku. ☐