1

Monomi on muotoa ax^n, jossa $a \in R$ ja $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
Polynomi on monomien summa.

a) $3x^4$ on polynomi

b) $a - 6$ on polynomi

c) $x^4 - 11x + \frac{3}{x}$ ei ole polynomi, koska termin $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ asteluku ei ole positiivinen kokonaisluku.

d) $7a^5 - 4a + 1$ on polynomi.

Vastaus a, b ja d

2

$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 1$

a) Polynomin asteluku on korkeimman termin asteluku eli 4.

b) Toisen asteen termi on $4x^2$.

c) Ensimmäisen asteen termi on $-x$, joten sen kerroin on -1.

d) Vakiotermi on 1.

Vastaus
a) 4
b) $4x^2$
c) -1
d) 1

3

Kolmannen asteen polynomi on muotoa $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Kolmannen asteen termin kerroin $a = 2$,
toisen asteen termin kerroin $b = 1$,
ensimmäisen asteen termin kerroin $c = -3$ ja
vakiotermi $d = 7$.

Kysytty polynomi on siis

$$2x^3 + x^2 - 3x + 7$$

Vastaus $\quad 2x^3 + x^2 - 3x + 7$

4

a)

c
a | b
$5x$ | $8x$ | $3x$

$a = 5x + 8x = 13x$

$b = 8x + 3x = 11x$

$c = a + b = 13x + 11x = 24x$

$24x$
$13x$ | $11x$
$5x$ | $8x$ | $3x$

b)

$2x$
a | $-x$
$7x$ | b | c

$a + (-x) = 2x$, joten $a = 2x + x = 3x$

$7x + b = a$, joten $b = a - 7x = 3x - 7x = -4x$

$b + c = -x$, joten $c = -x - b = -x - (-4x) = 3x$

$2x$
$3x$ | $-x$
$7x$ | $-4x$ | $3x$

c)

c
b | $-4x$
$7x$ | a | $-x$

$a + (-x) = -4x$, joten $a = -4x + x = -3x$

$b = a + 7x = -3x + 7x = 4x$

$c = b + (-4x) = 4x - 4x = 0$

0
$4x$ | $-4x$
$7x$ | $-3x$ | $-x$

5

$f(x) = 2x^2 - 5x - 12$

a) $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 12 = 2 \cdot 9 - 15 - 12 = -9$

b) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 12 = 2 + 5 - 12 = -5$

c) $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 12 = 2 \cdot 16 - 20 - 12 = 0$

Vastaus
a) $f(3) = -9$
b) $f(-1) = -5$
c) $f(4) = 0$

6

a) $2x^2 + 4x + 3x^2 + 6 = 2x^2 + 3x^2 + 4x + 6$

$$= 5x^2 + 4x + 6$$

b) $6x^2 - 7x + 8x - 5x^2 + 2 = 6x^2 - 5x^2 - 7x + 8x + 2$

$$= x^2 + x + 2$$

Vastaus a) $5x^2 + 4x + 6$

b) $x^2 + x + 2$

7

a) $(3x^2+4x-7)+(-x^2+8)=3x^2+4x-7-x^2+8$

$$=3x^2-x^2+4x-7+8$$

$$=2x^2+4x+1$$

b) $(4x+3)-(-3x-5)=4x+3+3x+5$

$$=4x+3x+3+5$$

$$=7x+8$$

Vastaus a) $2x^2+4x+1$
b) $7x+8$

8

$$P(x) = -x^2 + 2x - 4\,,\; x = 1\frac{3}{4}$$

a) $P(x) + Q(x) = (-x^2 + 2x - 4) + (3 - 2x + x^2)$

$$= -x^2 + 2x - 4 + 3 - 2x + x^2$$

$$= -x^2 + x^2 + 2x - 2x - 4 + 3$$

$$= -1$$

b) $P(x) - Q(x) = (-x^2 + 2x - 4) - (3 - 2x + x^2)$

$$= -x^2 + 2x - 4 - 3 + 2x - x^2$$

$$= -x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4 - 3$$

$$= -2x^2 + 4x - 7$$

Vastaus a) -1
b) $-2x^2 + 4x - 7$

9

a) $3x-(1-2x)=x-6$

$$3x-1+2x=x-6$$

$$5x-x=-6+1$$

$$4x=-5 \qquad \Big|:4$$

$$x=-\frac{5}{4}$$

$$x=-1\frac{1}{4}$$

b) $6-2x+4=8x-(2x+4)$

$$-2x+10=8x-2x-4$$

$$-2x-8x+2x=-4-10$$

$$-8x=-14 \qquad \Big|:(-8)$$

$$x=\frac{-14}{-8}$$

$$x=1\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

$$x=1\frac{3}{4}$$

Vastaus a) $x=-1\frac{1}{4}$ b) $x=1\frac{3}{4}$

10

Polynomit P ja Q saavat saman arvon kaikilla muuttujan x arvoilla, mikäli niiden termit ovat täsmälleen samat.

$$P(x) = Q(x)$$

$$ax + 3x - 2 = x - 2$$

$$(a+3)x - 2 = x - 2$$

$$(a+3)x = x$$

$$(a+3)x = 1x$$

On oltava $(a+3)x = 1x$ kaikilla arvoilla $x \in R$, joten saadaan yhtälö

$$a + 3 = 1$$

$$a = 1 - 3$$

$$a = -2$$

Vastaus $\quad a = -2$

Tapa 2

$$P(x) = Q(x)$$

$$ax + 3x - 2 = x - 2$$

$$ax + 3x - x = -2 + 2$$

$$ax + 2x = 0$$

$$(a + 2)x = 0$$

Saadussa yhtälössä vasemman ja oikean puolen on oltava yhtä suuret kaikilla muuttujan *x* arvoilla.
Siis on oltava

$$a + 2 = 0$$

$$a = -2$$

Vastaus $a = -2$

11

Väite:
Viiden peräkkäisen kokonaisluvun summa on viisi kertaa keskimmäinen luku.

Todistus:
Merkitään kokonaisluvuista pienintä kirjaimella *n*.
Tutkittavat luvut ovat tällöin n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ ja $n + 4$.

Lukujen summa on

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$$

$$=n+n+1+n+2+n+3+n+4$$

$$=5n+10$$

$$=5(n+2)$$

jossa $n + 2$ on tutkittavista luvuista keskimmäinen.

Siis väite on tosi. ☐

12

a) $3x^8 - 7x$ on muuttujan x polynomi, koska kaikkien termien asteluku on positiivinen kokonaisluku.

b) $x^2 - ax + \sqrt{x}$ ei ole muuttujan x polynomi, koska viimeisen termin asteluku ei ole positiivinen kokonaisluku.

c) $x^3 + 5x + x^{-3}$ ei ole muuttujan x polynomi, koska viimeisen termin asteluku ei ole positiivinen kokonaisluku.

d) $ax^3 - ax + \sqrt{a}$ on muuttujan x polynomi, koska kaikkien termien asteluku on positiivinen kokonaisluku. Luvut a ja $\sqrt{a}$ ovat reaalisia vakioita, $a \geq 0$.

Vastaus a ja d

13

$P(x) = -x^5 - 6x^4 + x^2 - 3$

a) Polynomin asteluku on korkeimman asteen termin asteluku eli 5.

b) Toisen asteen termi on x^2.

c) Kolmannen asteen termiä ei ole näkyvissä, joten sen on oltava $0x^3$. Sen kerroin on 0 (nolla).

d) Vakiotermi on -3.

Vastaus
a) 5
b) x^2
c) 0
d) -3

14

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1$

$$f(-3) = \frac{2}{3} \cdot (-3)^2 + 1 = \frac{2}{3} \cdot 9 + 1 = \frac{2 \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} + 1 = 6 + 1 = 7$$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

$$f(-3) = -(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 5 = -9 + 6 + 5 = 2$$

c) $f(x) = 2$

$$f(-3) = 2$$

Vastaus a) 7
b) 2
c) 2

15

Toisen asteen polynomi on muotoa $Q(x) = 3x^2 - x + 4$.

Ensimmäisen asteen termin kerroin

$P(x) + Q(x) = (3x^2 + x) + (3x^2 - x + 4)$ ja vakiotermi

$$= 3x^2 + x + 3x^2 - x + 4$$

$$= 3x^2 + 3x^2 + x - x + 4$$

$$= 6x^2 + 4$$

$P(x) - Q(x) = (3x^2 + x) - (3x^2 - x + 4)$.

$$= 3x^2 + x - 3x^2 + x - 4$$

$$= 3x^2 - 3x^2 + x + x - 4$$

$$= 2x - 4$$

Polynomi saa arvon 6, kun muuttuja x saa arvon -1 eli $P(-1) = 6$.

Saadaan

$$P(x) = ax^2 - 3x + 7$$

$$P(-1) = a \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 7$$

Ratkaistaan tuntematon kerroin a yhtälöstä $P(-1)=6$.

$$a\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+7=6$$

$$a+3+7=6$$

$$a=6-10$$

$$a=-4$$

Kysytty polynomi on $P(x)=-4x^2-3x+7$.

Vastaus $-4x^2-3x+7$

16

a) $(5x^2-4x)+(3x^2-2x+8)=5x^2-4x+3x^2-2x+8$

$$=5x^2+3x^2-4x-2x+8$$

$$=8x^2-6x+8$$

b) $(x^3-7x^2)-(-4x^3+2x^2-1)=x^3-7x^2+4x^3-2x^2+1$

$$=x^3+4x^3-7x^2-2x^2+1$$

$$=5x^3-9x^2+1$$

Vastaus a) $8x^2-6x+8$
b) $5x^3-9x^2+1$

17

<table>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">c</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">b</td><td colspan="2">$-2x^2+x+2$</td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$3x^2-5x$</td><td colspan="2">a</td><td colspan="2">$-2x^2-6x+4$</td></tr>
</table>

$$a+(-2x^2-6x+4)=-2x^2+x+2$$

$$\begin{aligned}a&=-2x^2+x+2-(-2x^2-6x+4)\\&=-2x^2+x+2+2x^2+6x-4\\&=-2x^2+2x^2+x+6x+2-4\\&=7x-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=(3x^2-5x)+a\\&=3x^2-5x+7x-2\\&=3x^2+2x-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c&=b+(-2x^2+x+2)\\&=(3x^2+2x-2)+(-2x^2+x+2)\\&=3x^2+2x-2-2x^2+x+2\\&=3x^2-2x^2+2x+x-2+2\\&=x^2+3x\end{aligned}$$

Vastaus

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">x^2+3x</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">$3x^2+2x-2$</td><td colspan="2">$-2x^2+x+2$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$3x^2-5x$</td><td colspan="2">$7x-2$</td><td colspan="2">$-2x^2-6x+4$</td></tr>
</table>

18

$P(x) = 3x^2 + x$, $Q(x) = 3x^2 - x + 4$

a) $$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (3x^2 + x) + (3x^2 - x + 4) \\ &= 3x^2 + x + 3x^2 - x + 4 \\ &= 3x^2 + 3x^2 + x - x + 4 \\ &= 6x^2 + 4 \end{aligned}$$

Siis polynomin *P* + *Q* asteluku on 2.

b) $$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (3x^2 + x) - (3x^2 - x + 4) \\ &= 3x^2 + x - 3x^2 + x - 4 \\ &= 3x^2 - 3x^2 + x + x - 4 \\ &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Siis polynomin *P* − *Q* asteluku on 1.

19

Lasketaan polynomien $-5x^2+7x$ ja $-4x^2+8x-3$ erotus ja nimetään se polynomiksi *P*.

$$\begin{aligned}P(x) &= (-5x^2+7x)-(-4x^2+8x-3)\\ &= -5x^2+7x+4x^2-8x+3\\ &= -5x^2+4x^2+7x-8x+3\\ &= -x^2-x+3\end{aligned}$$

$$P(-3) = -(-3)^2-(-3)+3 = -9+3+3 = -3$$

Vastaus Polynomien erotus on $-x^2-x+3$.
Erotuksen arvo on – 3, kun x = – 3.

20

a)

$$x-\frac{2x-5}{3}=\frac{2-x}{2} \qquad \Big| \cdot 6$$

$$6x-\overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{2x-5}{\cancel{3}}=\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{2-x}{\cancel{2}}$$

$$6x-2\cdot(2x-5)=3\cdot(2-x)$$

$$6x-4x+10=6-3x$$

$$2x+3x=6-10$$

$$5x=-4 \qquad \Big| :5$$

$$x=-\frac{4}{5}$$

b) $$\frac{3x-4}{2}-\frac{2x+7}{4}=1+\frac{x}{3} \quad \Big| \cdot 12$$

$$\overset{6}{\cancel{12}}\cdot\frac{3x-4}{\cancel{2}}-\overset{3}{\cancel{12}}\cdot\frac{2x+7}{\cancel{4}}=12\cdot 1+\overset{4}{\cancel{12}}\cdot\frac{x}{\cancel{3}}$$

$$6(3x-4)-3(2x+7)=12+4x$$

$$18x-24-6x-21=12+4x$$

$$12x-4x=12+24+21$$

$$8x=57 \quad \Big| :8$$

$$x=\frac{57}{8}$$

$$x=7\frac{1}{8}$$

Vastaus a) $x=-\frac{4}{5}$ b) $x=7\frac{1}{8}$

21

Sievennetään ensin annettu yhtälö ja sijoitetaan sievennettyyn muotoon tiedetty ratkaisu $x = -2$. Ratkaistaan tämän jälkeen kysytty vakio a.

$$\frac{x-3a}{2} - \frac{a-2x^2}{3} - \frac{a}{2} = \frac{15x^2-2x-6}{6} \qquad \big|\cdot 6$$

$$\overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{x-3a}{\cancel{2}} - \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{a-2x^2}{\cancel{3}} - \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{a}{\cancel{2}} = \cancel{6} \cdot \frac{15x^2-2x-6}{\cancel{6}}$$

$$3\cdot(x-3a) - 2(a-2x^2) - 3a = 15x^2 - 2x - 6$$

$$3x - 9a - 2a + 4x^2 - 3a = 15x^2 - 2x - 6$$

$$-14a = 15x^2 - 4x^2 - 2x - 3x - 6$$

$$-14a = 11x^2 - 5x - 6 \qquad \big|\, x = -2$$

$$-14a = 11\cdot(-2)^2 - 5\cdot(-2) - 6$$

$$-14a = 44 + 10 - 6$$

$$-14a = 48 \qquad \big|\, :(-14)$$

$$a = -\frac{48}{14}$$

$$a = -3\frac{6}{14} = -3\frac{3}{7}$$

Vastaus $\quad a = -3\frac{3}{7}$

22

$P(x) = 5x^2 - ax + 4 - (bx^2 - 7x + 3)$

$Q(x) = 8x^2 + x + c$

$$\begin{aligned}
P(x) + Q(x) &= \left(5x^2 - ax + 4 - (bx^2 - 7x + 3)\right) + (8x^2 + x + c) \\
&= 5x^2 - ax + 4 - bx^2 + 7x - 3 + 8x^2 + x + c \\
&= 5x^2 - bx^2 + 8x^2 - ax + 7x + x + 4 - 3 + c \\
&= 13x^2 - bx^2 - ax + 8x + 1 + c \\
&= (13 - b)x^2 + (-a + 8)x + (1 + c)
\end{aligned}$$

Polynomi *P* + *Q* on nolla kaikilla muuttujan *x* arvoilla täsmälleen, kun polynomin *P* + *Q* kaikkien termien kertoimet ja vakiotermi ovat nollia eli $P(x) + Q(x) = 0x^2 + 0x + 0$. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 13 - b = 0 \\ -a + 8 = 0 \\ 1 + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 13 \\ a = 8 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vastaus $\quad$ *a* = 8, *b* = 13 ja *c* = – 1

23

$b-a=c-b=3$, joten saadaan yhtälöt

$$b-a=3 \quad \text{ja} \quad c-b=3$$

$$a=b-3 \quad \text{ja} \quad c=b+3$$

a) $3a-b=11$

$$b=3a-11$$

Sijoitetaan tämä alkuperäisiin yhtälöihin ja ratkaistaan *a* ja *c*.

$$\begin{aligned} a&=b-3 & c&=b+3 & &\mid b=3a-11 \\ a&=3a-11-3 & c&=3a-11+3 & &\mid a=7 \\ a-3a&=-14 & c&=3\cdot 7-8 \\ -2a&=-14 & c&=13 \\ a&=7 \end{aligned}$$

Ratkaistaan *b* yhtälöstä $b=3a-11$ sijoittamalla $a=7$.

$$\begin{aligned} b&=3a-11 \quad \mid a=7 \\ &=3\cdot 7-11 \\ &=10 \end{aligned}$$

b) $3a-c=5$

$$c=3a-5$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön $c=b+3$ ja ratkaistaan *b*.

$$c=b+3 \qquad \big|\ c=3a-5$$

$$3a-5=b+3$$

$$b=3a-8 \qquad \big|\ \text{sijoitetaan } a=b-3$$

$$b=3\cdot(b-3)-8$$

$$b=3b-9-8$$

$$-2b=-17 \qquad \big|\ :(-2)$$

$$b=8\frac{1}{2}$$

$$a=b-3=8\frac{1}{2}-3=5\frac{1}{2}$$

$$c=b+3=8\frac{1}{2}+3=11\frac{1}{2}$$

Vastaus a) $a=7,\quad b=10,\quad c=13$

b) $a=5\frac{1}{2},\quad b=8\frac{1}{2},\quad c=11\frac{1}{2}$

24

Tutkitaan parittomia lukuja $2n+1$ ja $2m+1$, joissa $n, m \in Z$.

a) $$(2n+1)+(2m+1) = 2n+1+2m+1$$
$$= 2n+2m+2$$
$$= 2(n+m+1)$$

Koska $n+m+1 \in Z$, niin saatu summa on parillinen. $\square$

b) $$(2n+1)-(2m+1) = 2n+1-2m-1$$
$$= 2n-2m+1-1$$
$$= 2(n-m)$$

Koska $n-m \in Z$, niin saatu erotus on parillinen. $\square$

25

Kokonaisluku, joka päättyy numeroon 5, voidaan aina esittää muodossa $10n+5$, jossa $n \in Z$.

Tutkitaan numeroon 5 päättyviä kokonaislukuja $10n+5$ ja $10m+5$, joissa $n,\ m \in Z$.

$$\begin{aligned}(10n+5)+(10m+5) &= 10n+5+10m+5 \\ &= 10n+10m+10 \\ &= 10(n+m+1)\end{aligned}$$

Koska luku $n+m+1 \in Z$, niin saatu kokonaisluku $10(n+m+1)$ on jaollinen kymmenellä eli päättyy numeroon nolla. □

26

a) $x \cdot 3x = 3x^2$

b) $-2x^2 \cdot 3x^4 = -2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^4 = -6x^{2+4} = -6x^6$

c) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{1+2+3+4} = x^{10}$

Vastaus a) $3x^2$
b) $-6x^6$
c) x^{10}

27

a) $x(3x-4) = x \cdot 3x - x \cdot 4 = 3x^2 - 4x$

b) $-2t(5t-3) = -2t \cdot 5t - (-2t) \cdot 3 = -10t^2 + 6t$

Vastaus a) $3x^2 - 4x$
b) $-10t^2 + 6t$

28

a) $2a^3(4a^2 - 3a + 1) = 2a^3 \cdot 4a^2 - 2a^3 \cdot 3a + 2a^3 \cdot 1 = 8a^5 - 6a^4 + 2a^3$

b) $-x^2(-x^2 + 3x - 4) = -x^2 \cdot (-x^2) + (-x^2) \cdot 3x - (-x^2) \cdot 4$

$$= x^4 - 3x^3 + 4x^2$$

Vastaus a) $8a^5 - 6a^4 + 2a^3$
b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2$

29

a) $(x+3)(5x+7) = x \cdot 5x + x \cdot 7 + 3 \cdot 5x + 3 \cdot 7$

$= 5x^2 + 7x + 15x + 21$

$= 5x^2 + 22x + 21$

b) $(2a-4)(3a+1) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 1 - 4 \cdot 3a - 4 \cdot 1$

$= 6a^2 + 2a - 12a - 4$

$= 6a^2 - 10a - 4$

Vastaus a) $5x^2 + 22x + 21$
b) $6a^2 - 10a - 4$

30

a) $(x^2-3)(4x-2)=x^2\cdot 4x+x^2\cdot(-2)-3\cdot 4x-3\cdot(-2)$

$$=4x^3-2x^2-12x+6$$

b) $(-6x^2+2x)(4x-3)=-6x^2\cdot 4x-6x^2\cdot(-3)+2x\cdot 4x+2x\cdot(-3)$

$$=-24x^3+18x^2+8x^2-6x$$

$$=-24x^3+26x^2-6x$$

Vastaus

a) $4x^3-2x^2-12x+6$

b) $-24x^3+26x^2-6x$

31

a) $(x+5)(x-5) = x \cdot x + x \cdot (-5) + 5 \cdot x + 5 \cdot (-5)$

$= x^2 - 5x + 5x - 5^2$

$= x^2 - 5^2$

$= x^2 - 25$

b) $(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$

$= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 3 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 3$

$= 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 6x + 6x + 3$

$= 4x^2 + 12x + 9$

Vastaus a) $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

32

a) $3x-2(x-5)=3x-2\cdot x-2\cdot(-5)$

$=3x-2x+10$

$=x-10$

b) $5(2x+4)-6(3x-5)=5\cdot 2x+5\cdot 4-6\cdot 3x-6\cdot(-5)$

$=10x+20-18x+30$

$=-8x+50$

Vastaus a) $x-10$
b) $-8x+50$

33

a) $p(x) = (x+4)(x-4)$

$p(-5) = (-5+4)(-5-4) = (-1)\cdot(-9) = 9$

b) $p(x) = 2x^2 - (x+2)(x-2)$

$$\begin{aligned} p(-5) &= 2\cdot(-5)^2 - (-5+2)(-5-2) \\ &= 2\cdot 25 - (-3)\cdot(-7) \\ &= 50 - 21 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Vastaus a) $p(-5) = 9$
b) $p(-5) = 29$

34

$P(x)=3x^2-5x,\quad Q(x)=2x^2-4x+2$

a) $xP(x)=x(3x^2-5x)$

$$=x\cdot 3x^2+x\cdot(-5x)$$

$$=3x^3-5x^2$$

b) $2xP(x)-3xQ(x)$

$$=2x(3x^2-5x)-3x(2x^2-4x+2)$$

$$=2x\cdot 3x^2+2x\cdot(-5x)-3x\cdot 2x^2-3x\cdot(-4x)-3x\cdot 2$$

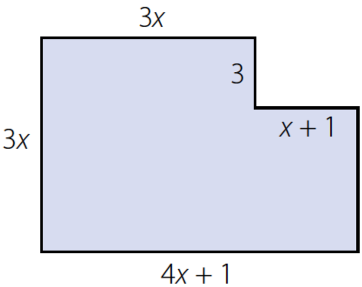
$$=6x^3-10x^2-6x^3+12x^2-6x$$

$$=2x^2-6x$$

Vastaus a) $3x^3-5x^2$

b) $2x^2-6x$

35



Kuvion pinta-ala on

$$A = 3x \cdot (4x+1) - 3(x+1) = 3x \cdot 4x + 3x \cdot 1 - 3x - 3 = 12x^2 - 3$$

Toisaalta tiedetään, että $A = 45$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$12x^2 - 3 = 45$$

$$12x^2 = 45 + 3$$

$$x^2 = \frac{48}{12}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

Oltava $x > 0$, joten $x = 2$.

Vastaus $\quad x = 2$

36

a) $3a^2 \cdot 5a^3 = 3 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^3 = 15a^{2+3} = 15a^5$

b) $(-4a^4) \cdot (-5a^3) = -4 \cdot (-5) \cdot a^4 \cdot a^3 = 20a^{4+3} = 20a^7$

Vastaus a) $15a^5$
b) $20a^7$

37

a) $4x^2(5x^2-6x+2)=4x^2\cdot 5x^2+4x^2\cdot(-6x)+4x^2\cdot 2$

$$=20x^4-24x^3+8x^2$$

b) $-3x(2x^3+5x-4)=-3x\cdot 2x^3-3x\cdot 5x-3x\cdot(-4)$

$$=-6x^4-15x^2+12x$$

Vastaus a) $20x^4-24x^3+8x^2$
b) $-6x^4-15x^2+12x$

38

a) $5x^2-(-2x)\cdot(3x-4)$

$=5x^2+2x\cdot 3x+2x\cdot(-4)$

$=5x^2+6x^2-8x$

$=11x^2-8x$

b) $2x\cdot(7x-3)-(-4x)\cdot(-6x+5)$

$=2x\cdot 7x+2x\cdot(-3)+4x\cdot(-6x)+4x\cdot 5$

$=14x^2-6x-24x^2+20x$

$=-10x^2+14x$

Vastaus a) $5x^2-(-2x)\cdot(3x-4)=11x^2-8x$

b) $2x\cdot(7x-3)-(-4x)\cdot(-6x+5)=-10x^2+14x$

39

a) $6t^2 - 3t^2 \cdot (2t - 4)$

$= 6t^2 - 3t^2 \cdot 2t - 3t^2 \cdot (-4)$

$= 6t^2 - 6t^3 + 12t^2$

$= 18t^2 - 6t^3$

$= -6t^3 + 18t^2$

b) $4t^3 - t^2 + 2t(t^2 - 2t + 3)$

$= 4t^3 - t^2 + 2t \cdot t^2 + 2t \cdot (-2t) + 2t \cdot 3$

$= 4t^3 - t^2 + 2t^3 - 4t^2 + 6t$

$= 6t^3 - 5t^2 + 6t$

Vastaus a) $-6t^3 + 18t^2$
b) $6t^3 - 5t^2 + 6t$

40

a) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{12}x+\frac{5}{12}x-\frac{5}{24}$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}x-\frac{5}{24}$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{24}$$

b) $(7+x)(x-7)=7x-7^2+x^2-7x=x^2-49$

Vastaus a) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{24}$

b) $(7+x)(x-7)=x^2-49$

41

$$\left((3x^2-5x)+(-x+4)\right)\left(2x+4\right)$$

$$=\left(3x^2-5x-x+4\right)\left(2x+4\right)$$

$$=\left(3x^2-6x+4\right)\left(2x+4\right)$$

$$=3x^2\cdot 2x+3x^2\cdot 4-6x\cdot 2x-6x\cdot 4+4\cdot 2x+4\cdot 4$$

$$=6x^3+12x^2-12x^2-24x+8x+16$$

$$=6x^3-16x+16$$

Vastaus $6x^3-16x+16$

42

a) $(3x-4)^2 = (3x-4)(3x-4)$

$= (3x)^2 + 3x\cdot(-4) - 4\cdot 3x + 4^2$

$= 9x^2 - 12x - 12x + 16$

$= 9x^2 - 24x + 16$

b) $(-2x^2+1)^2 = (-2x^2+1)(-2x^2+1)$

$= (-2x^2)^2 - 2x^2\cdot 1 + 1\cdot(-2x^2) + 1^2$

$= 4x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 1$

$= 4x^4 - 4x^2 + 1$

c) $(x^3+2)^2 = (x^3+2)(x^3+2)$

$= (x^3)^2 + x^3\cdot 2 + 2\cdot x^3 + 2^2$

$= x^6 + 4x^3 + 4$

Vastaus
a) $9x^2 - 24x + 16$
b) $4x^4 - 4x^2 + 1$
c) $x^6 + 4x^3 + 4$

43

$$
\begin{aligned}
(2x+1)(4x-2)(4x^2+1) &= \left(2x\cdot 4x + 2x\cdot(-2) + 1\cdot 4x + 1\cdot(-2)\right)(4x^2+1) \\
&= (8x^2-2)(4x^2+1) \\
&= 8x^2\cdot 4x^2 + 8x^2\cdot 1 - 2\cdot 4x^2 - 2\cdot 1 \\
&= 32x^4 - 2
\end{aligned}
$$

Vastaus $\quad 32x^4-2$

44

a) $\dfrac{\cancel{3x}(x+1)}{\cancel{3x}} = x+1$

b) $\dfrac{4x^2-8x}{4x} = \dfrac{\cancel{4x}(x-2)}{\cancel{4x}} = x-2$

c) $\dfrac{\overset{1}{\cancel{5}}\,x^2\,\cancel{(1-2x)}}{\underset{2}{\cancel{10}}\,\cancel{(1-2x)}} = \dfrac{x^2}{2}$

d) $\dfrac{3x-6x^3}{9-18x^2} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}\,x\,\cancel{(1-2x^2)}}{\underset{3}{\cancel{9}}\,\cancel{(1-2x^2)}} = \dfrac{x}{3}$

Vastaus

a) $x+1$

b) $x-2$

c) $\dfrac{x^2}{2}$

d) $\dfrac{x}{3}$

45

a) $4x(3x-2)-5x(2x-4)=2x^2+7$

$$12x^2-8x-10x^2+20x=2x^2+7$$

$$2x^2+12x=2x^2+7$$

$$2x^2-2x^2+12x=7$$

$$12x=7 \qquad \Big|:12$$

$$x=\frac{7}{12}$$

b) $8x^2-(2x+3)(4x-5)=1$

$$8x^2-(8x^2-10x+12x-15)=1$$

$$8x^2-8x^2+10x-12x+15=1$$

$$-2x=1-15 \qquad \Big|:(-2)$$

$$x=\frac{-14}{-2}$$

$$x=7$$

Vastaus

a) $x=\dfrac{7}{12}$

b) $x=7$

46

a) $p(x)=(2x^2-5)(x^2+1)$

$$p(-1)=\left(2\cdot(-1)^2-5\right)\left((-1)^2+1\right)$$

$$=(2-5)(1+1)$$

$$=-3\cdot 2$$

$$=-6$$

b) $p(x)=(2x^3+3x^2-1)(4x-6)$

$$p(-1)=\left(2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-1\right)\left(4\cdot(-1)-6\right)$$

$$=\left(2\cdot(-1)+3\cdot 1-1\right)(-4-6)$$

$$=(-2+3-1)(-10)$$

$$=0\cdot(-10)$$

$$=0$$

Vastaus a) $p(-1)=-6$
b) $p(-1)=0$

47

Puretaan sulut ja selvitetään polynomin toisen asteen termi.

$$(3x^2+ax-4)(-2x^2-5x+1)$$

$$=3x^2\cdot(-2x^2)+3x^2\cdot(-5x)+3x^2\cdot 1$$

$$+ax\cdot(-2x^2)+ax\cdot(-5x)+ax\cdot 1$$

$$-4\cdot(-2x^2)-4\cdot(-5x)-4\cdot 1$$

$$=-6x^4-15x^3+3x^2-2ax^3-5ax^2+ax+8x^2+20x-4$$

$$=-6x^4-15x^3-2ax^3+11x^2-5ax^2+ax+20x-4$$

Toisen asteen termi on $11x^2-5ax^2=(11-5a)x^2$, jonka kertoimen on oltava 6. Muodostetaan yhtälö.

$$11-5a=6$$

$$-5a=6-11 \quad \Big|\ \_(-5)$$

$$a=\frac{-5}{-5}$$

$$a=1$$

Vastaus $\quad a=1$

48

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ ja $Q(x) = 2x^4 + 6x^3$

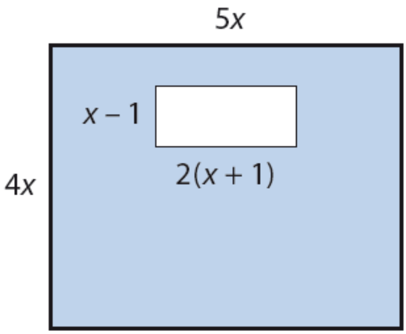
Muodostetaan vaadittu polynomi ja sievennetään sen lauseke, jotta saadaan selville korkeimman asteen termi.

$$
\begin{aligned}
&(2x^2 - 1)P(x) - xQ(x) \\
&= (2x^2 - 1)(x^3 - 4x^2 + 3) - x(2x^4 + 6x^3) \\
&= 2x^5 - 8x^4 + 6x^2 - x^3 + 4x^2 - 3 - 2x^5 - 6x^4 \\
&= -14x^4 - x^3 + 10x^2 - 3
\end{aligned}
$$

Polynomin asteluku on korkeimman asteen termin $-14x^4$ asteluku 4.

Vastaus 4

49



Lasketaan väritetyn osan pinta-ala vähentämällä koko suorakulmion alasta värittämättömän pikkusuorakulmion ala.
Suorakulmion kaikkien sivujen pituudet ovat positiivisia, joten saadaan määrittelyehdot

$$4x > 0 \text{ ja } 5x > 0 \text{ ja } x-1 > 0 \text{ ja } 2(x+1) > 0$$

$$x > 0 \text{ ja } x > 0 \text{ ja } x > 1 \text{ ja } x > -1$$

Kun nämä ehdot yhdistetään, saadaan määrittelyehdoksi $x > 1$.

$$\begin{aligned} A &= 4x \cdot 5x - (x-1) \cdot \big(2(x+1)\big) \\ &= 20x^2 - (x-1)(2x+2) \\ &= 20x^2 - (2x^2 + 2x - 2x - 2) \\ &= 20x^2 - (2x^2 - 2) \\ &= 20x^2 - 2x^2 + 2 \\ &= 18x^2 + 2 \end{aligned}$$

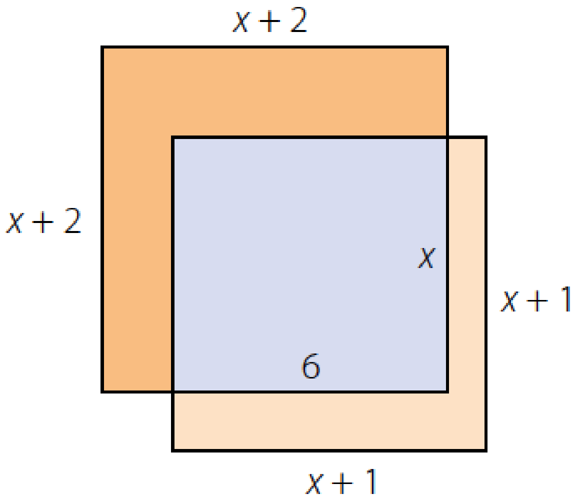
Tiedetään, että väritetyn osan pinta-ala on 74, joten voidaan muodostaa yhtälö.

$$
\begin{aligned}
18x^2 + 2 &= 74 \\
18x^2 &= 74 - 2 \qquad \Big|\, :18 \\
x^2 &= \frac{72}{18} \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm\sqrt{4} \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Määrittelyehdon mukaan $x > 1$, joten saadaan ratkaisuksi $x = 2$.

Vastaus $\quad x = 2$

50



Koko kuvion pinta-ala saadaan laskemalla yhteen neliöiden alat ja vähentämällä summasta kahteen kertaan mukaan tullut sininen keskiosa.
Sivujen pituudet ovat positiivisia, joten saadaan määrittelyehdot

$$x+2>0 \quad \text{ja} \quad x+2>0 \quad \text{ja} \quad x>0$$

$$x>-1 \quad \text{ja} \quad x>-2 \quad \text{ja} \quad x>0$$

Yhdistämällä ehdot saadaan määrittelyehdoksi $x>0$.

Pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= (x+2)^2+(x+1)^2-6\cdot x \\ &= (x+2)(x+2)+(x+1)(x+1)-6x \\ &= x^2+2x+2x+2^2+x^2+x+x+1^2-6x \\ &= 2x^2+5 \end{aligned}$$

Tiedetään, että ala on $A = 77$, joten voidaan muodostaa yhtälö.

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 5 &= 77 \\
2x^2 &= 77 - 5 && \Big| :2 \\
x^2 &= \frac{72}{2} \\
x^2 &= 36 \\
x &= \pm\sqrt{36} \\
x &= \pm 6
\end{aligned}
$$

Koska määrittelyehdon mukaan $x > 0$, saadaan ratkaisuksi $x = 6$.

Vastaus $\quad x = 6$

51

Taulukoidaan tehtävässä annetut tiedot ja muodostetaan lauseke myyntitulolle, kun x on myyntihinnan korotus sentteinä.

Jokainen 10 sentin korotus myyntihinnassa laskee päivämyyntiä 2 kukkakimpulla. Tällöin jokainen sentin korotus laskee päivämyyntiä $\frac{2}{10} = 0,2$ kukkakimpulla.

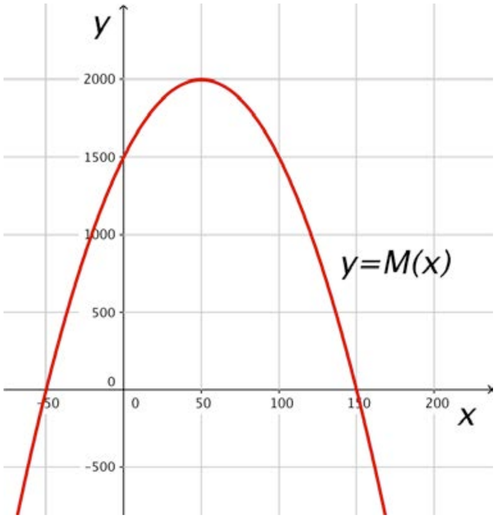
Myyntitulo saadaan kertomalla myyty kukkakimppujen kappalemäärä yksikköhinnalla.

Myyntihinta snt/kpl	Myyntimäärä kpl	Myyntitulo snt
50	30	30·50
50 + x	30 – 0,2x	(30 – 0,2x)· (50 + x)

Sievennetään myyntitulon lauseke.

$$
\begin{aligned}
M(x) &= (30 - 0,2x)(50 + x) \\
&= 1500 + 30x - 10x - 0,2x^2 \\
&= -0,2x^2 + 20x + 1500
\end{aligned}
$$

Piirretään funktion $M(x)$ kuvaaja geometriaohjelmalla.



Kuvaajan perusteella myyntitulo funktio M näyttäisi saavan suurimman arvonsa, kun $x \approx 50$.
Tarkistetaan tämä laskemalla myyntitulon $M(x)$ arvoja sijoittamalla x:lle arvoja sentin tarkkuudella.

x	$M(x)$	
49	1999,80	
50	2000	SUURIN ARVO
51	1999,80	

Myyntitulo on siis suurin, kun hinnankorotus $x = 50$ snt, jolloin kukkakimpun myyntihinta on 50snt + 50 snt = 100 snt = 1 euro.

Vastaus Myyntitulon lauseke on $-0,2x^2 + 20x + 1500$, jossa x on hinnankorotus sentteinä. Myyntitulo on suurin, kun kukkakimpun myyntihinta on 1 euro.

52

a) $(a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$

b) $(a+1)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 1 + 1^2 = a^2 + 2a + 1$

c) $(3a+1)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 1 + 1^2 = 9a^2 + 6a + 1$

Vastaus a) $a^2 + 6a + 9$

b) $a^2 + 2a + 1$

c) $9a^2 + 6a + 1$

53

a) $(a-4)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-4) + (-4)^2 = a^2 - 8a + 16$

b) $(b-8)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot (-8) + (-8)^2 = b^2 - 16b + 64$

c) $(3-x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-x) + (-x)^2 = 9 - 6x + x^2 \ (= x^2 - 6x + 9)$

Vastaus a) $a^2 - 8a + 16$

b) $b^2 - 16b + 64$

c) $9 - 6x + x^2$

54

a) $(2x+6)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 6 + 6^2 = 4x^2 + 24x + 36$

b) $(2x)^2 + 6^2 = 4x^2 + 36$

55

a) $(7x+1)^2 = (7x)^2 + 2\cdot 7x \cdot 1 + 1^2 = 49x^2 + 14x + 1$

b) $(2x-4)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x \cdot (-4) + (-4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$

c) $(5-4x)^2 = 5^2 + 2\cdot 5 \cdot (-4x) + (-4x)^2 = 25 - 40x + 16x^2$

Vastaus a) $49x^2 + 14x + 1$

b) $4x^2 - 16x + 16$

c) $25 - 40x + 16x^2$

56

a) $(x^2+1)^2 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2 \cdot 1 + 1^2$

$= x^{2\cdot 2} + 2x^2 + 1$

$= x^4 + 2x^2 + 1$

b) $(x^3-4)^2 = (x^3)^2 + 2\cdot x^3 \cdot (-4) + (-4)^2$

$= x^{3\cdot 2} - 8x^3 + 16$

$= x^6 - 8x^3 + 16$

c) $(x^4+6)^2 = (x^4)^2 + 2\cdot x^4 \cdot 6 + 6^2$

$= x^{4\cdot 2} + 12x^4 + 36$

$= x^8 + 12x^4 + 36$

Vastaus a) $x^4 + 2x^2 + 1$
b) $x^6 - 8x^3 + 16$
c) $x^8 + 12x^4 + 36$

57

a) $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=x^{2\cdot 2}-x^2+\frac{1}{4}$

$=x^4+x^2+\frac{1}{4}$

b) $(x^3-x)^2=(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot(-x)+x^2$

$=x^{3\cdot 2}-2x^4+x^2$

$=x^6-2x^4+x^2$

c) $(3x^3+1)^2=(3x^3)^2+2\cdot 3x^3\cdot 1+1^2$

$=9x^{3\cdot 2}+6x^3+1$

$=9x^6+6x^3+1$

Vastaus a) $x^4+x^2+\frac{1}{4}$

b) $x^6-2x^4+x^2$

c) $9x^6+6x^3+1$

58

a) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

b) $x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x - 1)^2$

59

a) $x^2+8x+a=x^2+2\cdot x\cdot 4+a$

$$=(x+4)^2,\ \text{kun } a=4^2=16$$

b) $x^2+ax+25=x^2+2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+5^2$

$$=(x+5)^2,\ \text{kun } \frac{a}{2}=5 \text{ eli } a=10$$

tai

$$x^2+ax+25=x^2+2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+(-5)^2$$

$$=(x-5)^2,\ \text{kun } \frac{a}{2}=-5 \text{ eli } a=-10$$

c) $4x^2-8x+a=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-2)+a$

$$=(2x-2)^2,\text{kun } a=(-2)^2=4$$

Vastaus
a) $a=16$
b) $a=10$ tai $a=-10$
c) $a=4$

60

a) $(x+1)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot 1 + 3\cdot x \cdot 1^2 + 1^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $(x-1)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot (-1) + 3\cdot x \cdot (-1)^2 + (-1)^3$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

c) $(-x+2)^3 = (2-x)^3$

$= 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot (-x) + 3\cdot 2 \cdot (-x)^2 + (-x)^3$

$= 8 - 12x + 6x^2 - x^3$

$= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

61

a) $(3x-2)^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot(-2)^1+3\cdot(3x)^1\cdot(-2)^2+(-2)^3$

$=27x^3+3\cdot 9x^2\cdot(-2)+9x\cdot 4-8$

$=27x^3-54x^2+36x-8$

b) $(5x+1)^3=(5x)^3+3\cdot(5x)^2\cdot 1+3\cdot 5x\cdot 1^2+1^3$

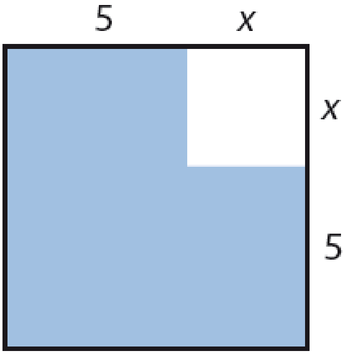
$=125x^3+3\cdot 25x^2+15x+1$

$=125x^3+75x^2+15x+1$

c) $(-x-1)^3=(-x)^3+3\cdot(-x)^2\cdot(-1)+3\cdot(-x)\cdot(-1)^2+(-1)^3$

$=-x^3-3x^2-3x-1$

62



Pinta-ala saadaan laskemalla koko neliön ala ja vähentämällä siitä värittämättömän pikkuneliön ala.

$$\begin{aligned} A &= (5+x)^2 - x^2 \\ &= 5^2 + 2\cdot 5\cdot x + x^2 - x^2 \\ &= 25 + 10x \end{aligned}$$

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} A &= 65 \\ 25 + 10x &= 65 \\ 10x &= 65 - 25 \\ 10x &= 40 \quad \mid :10 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus $x = 4$

63

Olkoot peräkkäiset kokonaisluvut x ja $x+1$, $x \in Z$.

Opettajan syntymävuodelle pätee yhtälö

$$(x+1)^2 - x^2 = 1991$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - x^2 = 1991$$

$$2x + 1 = 1991$$

$$2x = 1991 - 1$$

$$2x = 1990 \quad \vert : 2$$

$$x = 995$$

Peräkkäiset kokonaisluvut ovat 995 ja 996.

Vastaus 995 ja 996

64

a) $(5x+1)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1^2$

$= 25x^2 + 10x + 1$

b) $(x-7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-7) + (-7)^2$

$= x^2 - 14x + 49$

c) $\left(-x - \frac{1}{2}\right)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= x^2 + x + \frac{1}{4}$

65

a) $(3+x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2$

$= 9^2 + 6x + x^2$

b) $(5+2x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2x + (2x)^2$

$= 25 + 20x + 4x^2$

c) $(8x)^2 + 3^2 = 8^2 \cdot x^2 + 9$

$= 64x^2 + 9$

66

a) $(-3x-4)^2 = (-3x)^2 + 2\cdot(-3x)\cdot(-4) + (-4)^2$

$= 9x^2 + 24x + 16$

b) $\left(\dfrac{x}{2}-4\right)^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot(-4) + (-4)^2$

$= \dfrac{x^2}{4} - 4x + 16$

c) $(4x)^2 - 1^2 = 4^2\cdot x^2 - 1$

$= 16x^2 - 1$

67

a) $\left(x^3+\frac{1}{3}\right)^2=(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$=x^{3\cdot 2}+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{1}{9}$$

$$=x^6+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{9}$$

b) $\left(-x^3+x\right)^2=(-x^3)^2+2\cdot(-x^3)\cdot x+x^2$

$$=x^{3\cdot 2}-2x^4+x^2$$

$$=x^6-2x^4+x^2$$

c) $\left(\frac{3}{4}x^2-1\right)^2=\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2+2\cdot\frac{3}{4}x^2\cdot(-1)+(-1)^2$

$$=\frac{3^2}{4^2}x^{2\cdot 2}-\frac{3}{2}x^2+1$$

$$=\frac{9}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+1$$

68

a) $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b) $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5x + 5^2$

$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-5) + (-5)^2$

$= (2x - 5)^2$

69

a) $x^4 + 6x^2 + a = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + a$

$$= \left(x^2 + 3\right)^2, \text{ kun } a = 3^2 = 9$$

b) $ax^2 - 30x + 25 = ax^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 5 + 5^2$

$$= (-3x + 5)^2, \text{ kun } a = (-3)^2 = 9$$

c) $4x^4 + ax^2 + 16 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{a}{4} + 4^2$

$$= (2x^2 + 4)^2, \text{ kun } \frac{a}{4} = 4 \text{ eli } a = 16$$

tai

$$4x^4 + ax^2 + 16 = (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{a}{4} + (-4)^2$$

$$= (2x^2 - 4)^2, \text{ kun } \frac{a}{4} = -4 \text{ eli } a = -16$$

Vastaus
a) $a = 9$
b) $a = 9$
c) $a = -16$ tai $a = 16$

70

a) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot 2 + 3\cdot x \cdot 2^2 + 2^3$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(-3x+1)^3 = (-3x)^3 + 3\cdot(-3x)^2 \cdot 1 + 3\cdot(-3x)\cdot 1^2 + 1^3$

$= -27x^3 + 27x^2 - 9x + 1$

c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} + 3\cdot x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

71

a) $(x^2-1)^3=(x^2)^3+3\cdot(x^2)^2\cdot(-1)+3\cdot x^2\cdot(-1)^2+(-1)^3$

$$=x^6-3x^4+3x^2-1$$

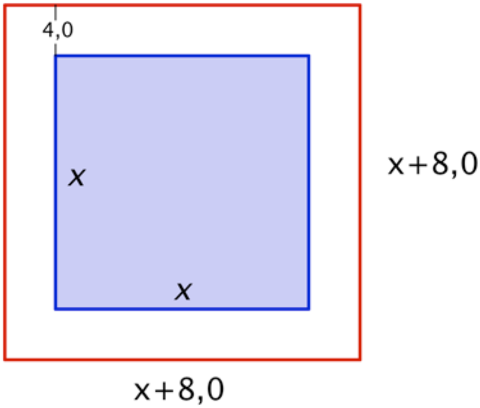
b) $(5x+2)^3=(5x)^3+3\cdot(5x)^2\cdot 2+3\cdot 5x\cdot 2^2+2^3$

$$=125x^3+150x^2+60x+8$$

c) $\left(-x^2-1\right)^3=(-x^2)^3+3\cdot(-x^2)^2\cdot(-1)+3\cdot(-x^2)\cdot(-1)^2+(-1)^3$

$$=-x^6-3x^4-3x^2-1$$

72



Kehyksen pinta-alan avulla saadaan yhtälö

$$(x+8)^2 - x^2 = 544$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 - x^2 = 544$$

$$16x + 64 = 544$$

$$16x = 544 - 64 \qquad |:16$$

$$x = \frac{480}{16}$$

$$x = 30 \text{ (cm)}$$

Maalauksen pinta-ala on $A = 30^2 = 900 \text{ (cm}^2\text{)}$

Vastaus 900 cm^2

73

Peräkkäiset parilliset luvut ovat $2n$ ja $2n+2$.

Isoäidin syntymävuosi on

$$
\begin{aligned}
(2n+2)^2-(2n)^2 &= 1948 \\
(2n)^2+2\cdot 2n\cdot 2+2^2-(2n)^2 &= 1948 \\
8n+4 &= 1948 \\
8n &= 1948-4 \qquad \vert :8 \\
n &= \frac{1944}{8} \\
n &= 243
\end{aligned}
$$

Peräkkäiset parilliset luvut ovat

$2n = 2\cdot 243 = 486$ sekä $486+2=488$.

Seuraava vastaava vuosiluku on $490^2-488^2=1956$.

Vastaus 486 ja 488. Seuraava vastaava vuosi on 1956.

74

a) Kokonaisluku, jonka viimeinen numero on 5 on muotoa $10n+5$, jossa $n \in Z$.

Luvun neliö on

$$\begin{aligned}(10x+5)^2 &= (10n)^2 + 2 \cdot 10n \cdot 5 + 5^2 \\ &= 100n^2 + 100n + 25 \\ &= 100(n^2+n) + 25\end{aligned}$$

Koska luku $n^2 + n \in Z$, niin luku $100(n^2+n)$ on myös kokonaisluku ja sen kaksi viimeistä numeroa ovat nollia. Kun tähän lukuun lisätään luku 25, saadaan kokonaisluku, jonka kaksi viimeistä numeroa ovat 2 ja 5. $\square$

b) $$\begin{aligned}65^2 &= (60+5)^2 \\ &= (10 \cdot 6 + 5)^2 \\ &= (10 \cdot 6)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 5 + 5^2 \\ &= 10^2 \cdot 6^2 + 100 \cdot 6 + 25 \\ &= 100 \cdot 36 + 100 \cdot 6 + 25 \\ &= 100(36+6) + 25 \\ &= 100 \cdot 42 + 25 \\ &= 4225\end{aligned}$$

Vastaus b) $65^2 = 4225$

75

Olkoot kaksi kokonaislukua *a* ja *b*.

Väitteen mukaan $(a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b$ on jonkin kokonaisluvun neliö.

Todistetaan väite sieventämällä lauseke.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b \\
&= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
&= a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 \\
&= (a-b)^2 \in Z \qquad \square
\end{aligned}
$$

76

Pariton luku on aina muotoa $2n+1$, jossa $n \in Z$.

Lasketaan luvun $2n+1$ kuutio.

$$
\begin{aligned}
(2n+1)^3 &= (2n)^3 + 3\cdot(2n)^2\cdot 1 + 3\cdot 2n\cdot 1^2 + 1^3 \\
&= 8n^3 + 3\cdot 4n^2 + 6n + 1 \\
&= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\
&= 2\cdot(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1
\end{aligned}
$$

Saatu luku on pariton kokonaisluku, koska $4n^3 + 6n^2 + 3n \in Z$. $\square$

Vastaus on

77

a) Pascalin kolmion neljäs rivi on

1	$1+3$	$3+3$	$3+1$	1	eli
1	4	6	4	1	

b) $$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3\cdot b^1 + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a^1\cdot b^3 + 1\cdot b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

c) $$(x+3)^4 = x^4 + 4\cdot x^3\cdot 3 + 6\cdot x^2\cdot 3^2 + 4\cdot x\cdot 3^3 + 3^4$$

$$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

$$(x-1)^4 = x^4 + 4\cdot x^3\cdot(-1) + 6\cdot x^2\cdot(-1)^2 + 4\cdot x\cdot(-1)^3 + (-1)^4$$

$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

78

a) $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2$

$= x^2 - 49$

b) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2$

$= x^2 - 1$

c) $(3+x)(3-2x) = 3^2 - 3\cdot 2x + x\cdot 3 - x\cdot 2x$

$= 9 - 6x + 3x - 2x^2$

$= -2x^2 - 3x + 9$

79

a) $(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2$

$$= 4x^2 - 9$$

b) $(x^2-8)(x^2+8) = (x^2)^2 - 8^2$

$$= x^4 - 64$$

80

a) $5(x+2)(x-2) = 5\left(x^2 - 2^2\right)$

$$= 5x^2 - 20$$

b) $x^2 - 2(x+3)(x-3) = x^2 - 2\left(x^2 - 3^2\right)$

$$= x^2 - 2x^2 + 2 \cdot 9$$

$$= -x^2 + 18$$

81

a) $(x^3 - 9)(x^3 + 9) = (x^3)^2 - 9^2$

$$= x^6 - 81$$

b) $(x^2 + 3)(x^2 - 3) = (x^2)^2 - 3^2$

$$= x^4 - 9$$

82

a) $5+(x+2)(x-2)=5+x^2-2^2$

$$=5+x^2-4$$

$$=x^2+1$$

b) $x^2-(2x+1)(2x-1)=x^2-\left((2x)^2-1^2\right)$

$$=x^2-4x^2+1$$

$$=-3x^2+1$$

83

a) $(x+3)(x-3)(x^2+9) = (x^2-3^2)(x^2+9)$

$= (x^2-9)(x^2+9)$

$= (x^2)^2 - 9^2$

$= x^4 - 81$

b) $(x+4)(x-4)-(x-2)^2 = x^2-4^2-\left(x^2+2\cdot x\cdot(-2)+(-2)^2\right)$

$= x^2-16-(x^2-4x+4)$

$= x^2-16-x^2+4x-4$

$= 4x-20$

84

a)
$$(x-5)^2 = (x+5)(x-5)$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot (-5) + (-5)^2 = x^2 - 5^2$$
$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 25$$
$$x^2 - x^2 - 10x = -25 - 25$$
$$-10x = -50 \qquad \big| : (-10)$$
$$x = 5$$

b)
$$(2x+3)^2 = 4(x+3)(x-3)$$
$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4(x^2 - 3^2)$$
$$4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 - 36$$
$$12x = -36 - 9 \qquad \big| : 12$$
$$x = \frac{-45^{(3}}{12}$$
$$x = \frac{-15}{4}$$
$$x = -3\frac{3}{4}$$

Vastaus a) $x = 5$ b) $x = -3\frac{3}{4}$

85

a) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2$

$= (x+4)(x-4)$

b) $9x^2 - 1 = 3^2 x^2 - 1^2$

$= (3x)^2 - 1^2$

$= (3x+1)(3x-1)$

c) $25x^2 - 9 = 5^2 x^2 - 3^2$

$= (5x)^2 - 3^2$

$= (5x+3)(5x-3)$

86

a) $\frac{x^2-16}{3x+12}=\frac{x^2-4^2}{3(x+4)}$

$=\frac{\cancel{(x+4)}(x-4)}{3\cancel{(x+4)}}$

$=\frac{x-4}{3}$

b) $\frac{1-9x^2}{1-3x}=\frac{1^2-3^2x^2}{1-3x}$

$=\frac{1^2-(3x)^2}{1-3x}$

$=\frac{(1+3x)\cancel{(1-3x)}}{\cancel{1-3x}}$

$=1+3x$

c) $\frac{5x+15}{x^2-9}=\frac{5(x+3)}{x^2-3^2}$

$=\frac{5\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-3)}$

$=\frac{5}{x-3}$

Vastaus a) $\frac{x-4}{3}$ b) $1+3x$ c) $\frac{5}{x-3}$

87

a) $101^2 - 99^2 = (101 + 99)(101 - 99)$

$= 200 \cdot 2$

$= 400$

b) $53^2 - 47^2 = (53 + 47)(53 - 47)$

$= 100 \cdot 6$

$= 600$

Vastaus a) 400 b) 600

88

a) $(3x+4)(3x-4) = (3x)^2 - 4^2$

$$= 3^2 x^2 - 16$$

$$= 9x^2 - 16$$

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$= x^2 - \frac{1}{2^2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{4}$$

c) $(3x+2)(-3x-2) = 3x\cdot(-3x) - 3x\cdot 2 - 2\cdot 3x - 2^2$

$$= -3^2 x^2 - 6x - 6x - 4$$

$$= -9x^2 - 12x - 4$$

89

a) $(2x^2+5)(2x^2-5) = (2x)^2 - 5^2$

$$= 2^2 x^2 - 25$$

$$= 4x^2 - 25$$

b) $(-x+4)(-x-4) = (-x)^2 - 4^2$

$$= x^2 - 16$$

c) $(4a^3+2b^2)(4a^3-2b^2) = (4a^3)^2 - (2b^2)^2$

$$= 4^2(a^3)^2 - 2^2(b^2)^2$$

$$= 16a^6 - 4b^4$$

90

a) $$x-(x+3)\cdot 2 = x-(2x+6)$$
$$= x-2x-6$$
$$= -x-6$$

b) $$x^2-(x+3)(x-3) = x^2-(x^2-3^2)$$
$$= x^2-x^2+3^2$$
$$= 9$$

c) $$(x+3)^2-(x-3)^2 = \big((x+3)+(x-3)\big)\big((x+3)-(x-3)\big)$$
$$= (2x)\cdot(6)$$
$$= 12x$$

c-kohta toisin:

$$(x+3)^2-(x-3)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2-\left(x^2+2\cdot x\cdot(-3)+(-3)^2\right)$$
$$= x^2+6x+9-x^2+6x-9$$
$$= 12x$$

Vastaus a) $x-2(x+3) = -x-6$
b) $x^2-(x+3)(x-3) = 9$
c) $(x+3)^2-(x-3)^2 = 12x$

91

a) $$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$=x^2+x+\frac{1}{4}-x^2+\frac{1}{4}$$

$$=x+\frac{2}{4}$$

$$=x+\frac{1}{2}$$

b) $$\big((x+3)(x-3)\big)^2=(x^2-3^2)^2$$

$$=(x^2-9)^2$$

$$=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot(-9)+(-9)^2$$

$$=x^4-18x^2+81$$

92

a) $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=(2x-5)^2$

$$4\left(x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-1=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-5)+(-5)^2$$

$$4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=4x^2-20x+25+1$$

$$4x^2-1=4x^2-20x+26$$

$$20x=1+26 \qquad \Big|:20$$

$$x=\frac{27}{20}$$

b) $(x+3)(x-3)-4x(x-1)=(1-x)(3x-1)$

$$x^2-9-4x^2+4x=3x-1-3x^2+x$$

$$-9-3x^2+4x=4x-1-3x^2$$

$$-9=-1$$

epätosi, ei ratkaisua

Vastaus a) $x=\frac{27}{20}$

b) ei ratkaisua

93

a) $(7x+6)(7x-6)(49x^2+36) = \left((7x)^2-6^2\right)(49x^2+36)$

$= (49x^2-36)(49x^2+36)$

$= (49x^2)^2 - 36^2$

$= 2401x^4 - 1296$

b) $(3x^2-4)^2 - 3(x^2-4)(x^2+4)$

$= (3x^2)^2 + 2\cdot 3x^2\cdot(-4) + (-4)^2 - 3(x^4-4^2)$

$= 9x^4 - 24x^2 + 16 - 3x^4 + 48$

$= 6x^4 - 24x^2 + 64$

94

a) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2$

$= (x+7)(x-7)$

b) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$

$= (2x+3)(2x-3)$

c) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2$

$= (x^2+4)(x^2-4)$

$= (x^2+4)(x^2-2^2)$

$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

95

a) $$\frac{x^2-49}{x+7}=\frac{x^2-7^2}{x+7}$$

$$=\frac{\cancel{(x+7)}\,(x-7)}{\cancel{x+7}}$$

$$=x-7$$

b) $$\frac{36x^2-1}{6x-1}=\frac{(6x)^2-1^2}{6x-1}$$

$$=\frac{(6x+1)\,\cancel{(6x-1)}}{\cancel{6x-1}}$$

$$=6x+1$$

c) $$\frac{x^4-16}{2x+4}=\frac{(x^2)^2-4^2}{2x+4}$$

$$=\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{2x+4}$$

$$=\frac{(x^2+4)\,\cancel{(x+2)}\,(x-2)}{2\,\cancel{(x+2)}}$$

$$=\frac{(x^2+4)(x-2)}{2}$$

$$\left(=\frac{x^3+4x-2x^2-8}{2}=\frac{x^3-2x^2+4x-8}{2}\right)$$

96

a) $$\frac{x^2+10x+25}{4x+20}=\frac{x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2}{4(x+5)}$$

$$=\frac{(x+5)^{\cancel{2}}}{4\cancel{(x+5)}}$$

$$=\frac{x+5}{4}$$

b) $$\frac{4x^2+4x+1}{3-12x^2}=\frac{(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1^2}{3(1-4x^2)}$$

$$=\frac{(2x+1)^2}{3\left(1^2-(2x)^2\right)}$$

$$=\frac{(2x+1)^{\cancel{2}}}{3\cancel{(1+2x)}(1-2x)}$$

$$=\frac{2x+1}{3(1-2x)}$$

$$\left(=\frac{2x+1}{3-6x}\right)$$

Vastaus a) $\frac{x+5}{4}$ b) $\frac{2x+1}{3(1-2x)}$

97

Olkoon n kokonaisluku. Tutkitaan lukua $n^3 - n$.

a) Väite: $n^3 - n$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo.

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n^2 - 1) \\ &= n(n^2 - 1^2) \\ &= n(n+1)(n-1) \\ &= (n-1)\cdot n \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Saatiin kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo, joten väite on tosi. □

b) Väite: Luku $n^3 - n$ on aina jaollinen luvuilla 2 ja 3.

Kokonaisluvuista joka toinen on jaollinen kahdella ja joka kolmas on jaollinen kolmella. Koska $n^3 - n = (n-1)\cdot n \cdot (n+1)$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo, niin ainakin yksi luvuista on jaollinen kahdella (eli on parillinen) ja täsmälleen yksi on jaollinen kolmella. □

98

a) $31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$

$127 = 128 - 1 = 2^7 - 1$

$8191 = 8192 - 1 = 2^{13} - 1$

b) Olkoon $n > 2$ parillinen kokonaisluku. Luku n voidaan esittää muodossa $n = 2k$ jollain $k = 2, 3, 4, \ldots$.

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2k} - 1 \\ &= (2^k)^2 - 1^2 \\ &= (2^k + 1)(2^k - 1), \end{aligned}$$

jossa $2^k + 1 \in Z_+$ ja $2^k - 1 \in Z_+$. Luku $2^n - 1$ voidaan siis esittää kahden kokonaisluvun tulona. Koska $n > 2$, niin kumpikaan tulon $(2^k + 1)(2^k - 1)$ tekijöistä ei ole ykkönen. Näin luku $2^n - 1$ on jaollinen paitsi itsellään ja luvulla 1, myös kokonaisluvuilla $(2^k + 1)$ ja $(2^k - 1)$, joten $2^n - 1$ ei ole alkuluku. $\square$

Huomaa, että ehto $n > 2$ on oleellinen. Jos sallittaisiin tapaus $n = 2$, niin tarkasteltava luku olisi alkuluku $2^2 - 1 = 3$. Edellä esitetty jako tekijöihin pätisi silloinkin:

$$2^2 - 1 = 2^{2 \cdot 1} - 1 = (2^1)^2 - 1^2 = (2 + 1) \cdot (2 - 1) = 3 \cdot 1$$

Tällöin saadaan tulos, jonka mukaan alkuluku 3 on jaollinen itsellään ja luvulla 1, mikä on kuten pitääkin.

99

$$
\begin{aligned}
1023 &= 1024 - 1 \\
&= 2^{10} - 1 \\
&= 2^{5\cdot 2} - 1^2 \\
&= (2^5)^2 - 1^2 \\
&= (2^5 + 1)(2^5 - 1) \\
&= (32 + 1)(32 - 1) \\
&= 33 \cdot 31
\end{aligned}
$$

Vastaus $1023 = 2^{10} - 1$.
Koska $1023 = 31 \cdot 33$, niin 1023 ei ole alkuluku.