YHTEINEN TEKIJÄ

TEHTÄVIEN RATKAISUT

Luku 5.1

230.

a) Jonon neljä ensimmäistä jäsentä saadaan sijoittamalla $n=1, n=2, n=3$ ja $n=4$ lausekkeeseen $a_n = 2n+3$.

$a_1 = 2\cdot 1+3 = 2+3 = 5$

$a_2 = 2\cdot 2+3 = 4+3 = 7$

$a_3 = 2\cdot 3+3 = 6+3 = 9$

$a_4 = 2\cdot 4+3 = 8+3 = 11$

b) Sijoitetaan $n=1, n=2, n=3$ ja $n=4$ lausekkeeseen $a_n = 2+(-1)^n$.

$a_1 = 2+(-1)^1 = 2-1 = 1$

$a_2 = 2+(-1)^2 = 2+1 = 3$

$a_3 = 2+(-1)^3 = 2-1 = 1$

$a_4 = 2+(-1)^4 = 2+1 = 3$

Vastaus: a) 5, 7, 9, 11   b) 1, 3, 1, 3

231.

a) $a_1 = 3\cdot 1^2 - 7\cdot 1 = 3\cdot 1 - 7\cdot 1 = 3 - 7 = -4$

b) $a_3 = 3\cdot 3^2 - 7\cdot 3 = 3\cdot 9 - 7\cdot 3 = 27 - 21 = 6$

c) $a_{10} = 3\cdot 10^2 - 7\cdot 10 = 3\cdot 100 - 7\cdot 10 = 300 - 70 = 230$

232.

a) $a_6 = \dfrac{6^2 - 8\cdot 6}{4} = -3$

b) $a_6 = 100\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-1} = 100\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{25}{8}$

233.

a) Jonon 10. jäsen lasketaan sijoittamalla $n = 10$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$a_{10} = 32 - 4\cdot 10 = 32 - 40 = -8$

b) Luku 6 on jonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n, jolla $a_n = 6$.
Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &= 6 \\ 32 - 4n &= 6 && \mid -32 \\ -4n &= -26 && \mid :(-4) \\ n &= \frac{26}{4} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisuna oleva luku 6,5 ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 6 ei ole jonon jäsen.

Vastaus: a) $a_{10} = -8$ b) ei ole

234.

a) Luku 53 on jonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n, jolla $a_n = 53$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &= 53 \\ 6n+5 &= 53 \quad && |-5 \\ 6n &= 48 \quad && |:6 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisuna oleva luku 8, on positiivinen kokonaisluku, luku 53 on jonon jäsen, $a_8 = 53$.

b) Luku 80 on jonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n, jolla $a_n = 80$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &= 80 \\ 6n+5 &= 80 \quad && |-5 \\ 6n &= 75 \quad && |:6 \\ n &= \frac{75}{6} \\ n &= 12{,}5 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisuna oleva luku 12,5 ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 80 ei ole jonon jäsen.

Vastaus: a) on, $a_8 = 53$ b) ei ole

235.

Yleisen jäsenen a_n tulee olla suurempi kuin -1000. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö (laskimella).

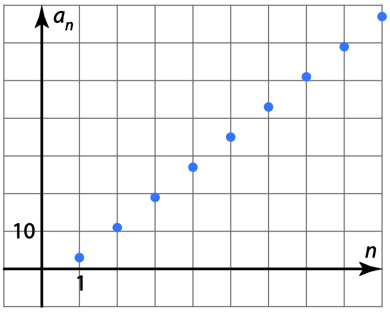
$$\begin{aligned} a_n &> -1000 \\ 12-5n &> -1000 \quad && |-12 \\ n &< 202{,}4 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 202{,}4$ on 202, joten lukujonon 202 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin -1000.

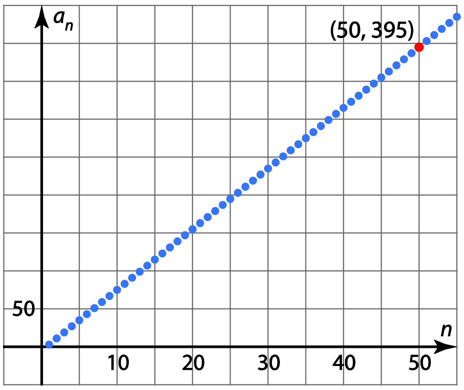
Vastaus: 202

236.

a) Piirretään lukujonon kuvaaja yleisen jäsenen lausekkeen avulla.



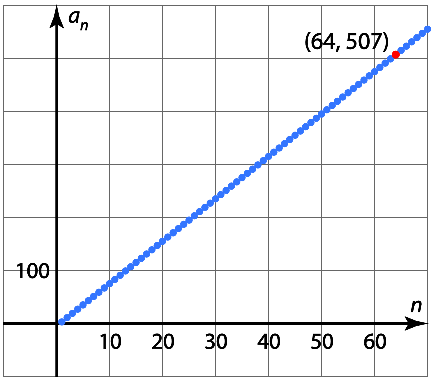
b) Kuvaajan pisteen ensimmäinen koordinaatti kertoo jäsenen järjestysluvun ja toinen koordinaatti kertoo jäsenen arvon. Etsitään kuvaajalta piste, jonka ensimmäinen koordinaatti on 50.



Piste on (50,395), joten $a_{50} = 395$.

c)

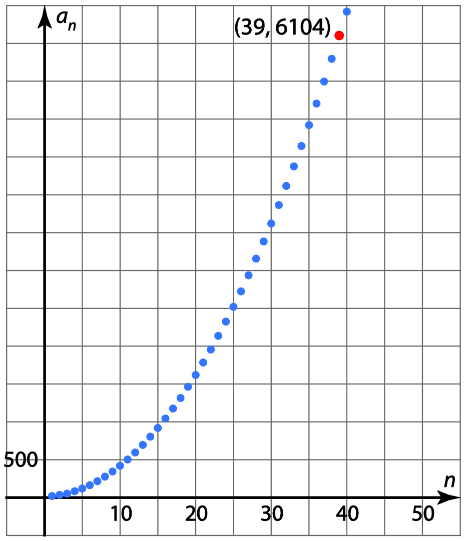
Etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti ylittää ensimmäisen kerran arvon 500.



Lukujonon 64. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin 500, joten 63 ensimmäisen jäsenen arvo on pienempi kuin 500.

Vastaus: b) $a_{50} = 395$ c) 63 jäsentä

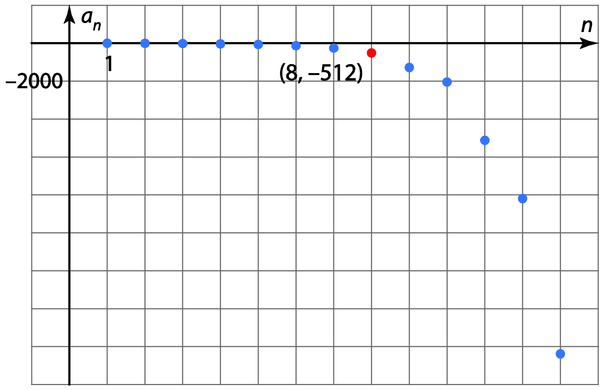
237. Etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti ylittää ensimmäisen kerran arvon 6 000.



Lukujonon 39. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin 6000.

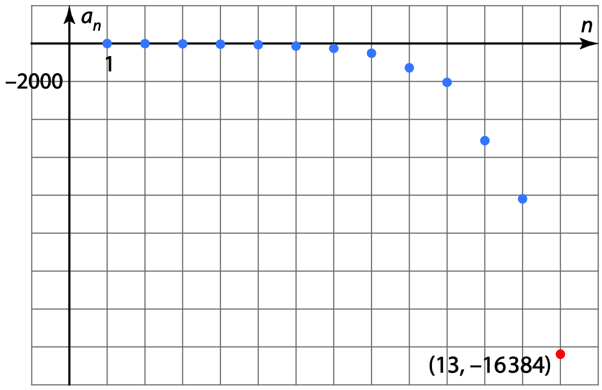
238.

a) Etsitään kuvaajalta piste, jonka ensimmäinen koordinaatti on 8.



Piste on (8, −512), joten $a_8 = -512$.

b) Etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti alittaa ensimmäisen kerran arvon −12 000.



Lukujonon 13. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on pienempi kuin −12000, joten lukujonon 12 ensimmäisen arvo on suurempi kuin −12000.

Vastaus: a) $a_8 = -512$ b) 12 jäsentä

239.

a) Jonon 1. jäsen lasketaan sijoittamalla $n=1$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_1 = \sqrt{200-4\cdot 1} = \sqrt{200-4} = \sqrt{196}$$

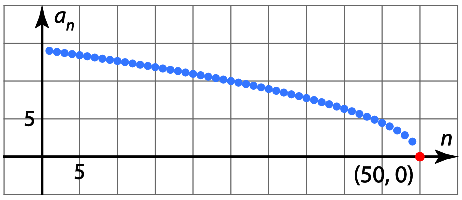
Jonon 2. jäsen lasketaan sijoittamalla $n=2$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_2 = \sqrt{200-4\cdot 2} = \sqrt{200-8} = \sqrt{192}$$

Jonon 3. jäsen lasketaan sijoittamalla $n=3$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_3 = \sqrt{200-4\cdot 3} = \sqrt{200-12} = \sqrt{188}$$

b)



Kuvaajasta havaitaan että lukujonon 50. jäsen saa arvon 0 ja on lukujonon viimeinen jäsen. Eli $a_{50} = 0$.

240.

Lukujonon 20. jäsen lasketaan sijoittamalla $n = 20$ yleisen jäsenen lausekkeeseen. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio k.

$$
\begin{aligned}
a_{20} &= 100 \\
k \cdot 20 - 15 &= 100 \qquad |+15 \\
k \cdot 20 &= 115 \qquad\qquad |:20 \\
k &= \frac{115^{(5}}{20} \\
k &= \frac{23}{4}
\end{aligned}
$$

241.

a) Yleinen jäsen voi olla esimerkiksi: $-5 \cdot (-1)^n$.

b) Yleinen jäsen voi olla esimerkiksi: $6 + (-1)^{1+n}$.

c) Yleinen jäsen voi olla esimerkiksi: $12 + 2 \cdot (-1)^n$.

242.

a) Kirjoitetaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä näkyviin.

1. jäsen: $a_1 = 4$

2. jäsen: $a_2 = 4 + 2$

3. jäsen: $a_3 = 4 + 2 + 2 = 4 + 2 \cdot 2$

4. jäsen: $a_4 = 4 + 2 + 2 + 2 = 4 + 2 \cdot 3$

Havaitaan, että jonon yleinen jäsen on $a_n = 2 + 2 \cdot (n - 1) = 4 + 2n - 2 = 2 + 2n$.

b) Ratkaistaan millä n:n arvolla yleinen jäsen on 24.

$$\begin{aligned} a_n &= 24 \\ 2 + 2n &= 24 \quad \Big| -2 \\ 2n &= 22 \quad \Big| :2 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Emmi tuo 11. matkalta 24 simpukankuorta.

Vastaus: a) $a_n = 2 + 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ b) 11. matkalta

243.

a) Lasketaan kolmannen kerroksen tölkkimäärä eli jonon 3. jäsen.

$a_3 = 237 - 8 \cdot 3 = 237 - 24 = 213$

Kolmannessa kerroksessa on 213 tölkkiä.

b) Tölkkien lukumäärän a_n tulee olla positiivinen. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö (laskimella).

$$\begin{aligned} a_n &> 0 \\ 237 - 8n &> 0 \\ n &< 29{,}625 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 29{,}625$ on 29. Koska jonon 29 ensimmäistä jäsentä ovat positiivisia, on rakennelmassa on 29 kerrosta.

c) Viimeisessä kerroksessa olevien tölkkien määrä on jonon 29. jäsen.

$a_{29} = 237 - 8 \cdot 29 = 237 - 232 = 5$

Rakennelman viimeisessä kerroksessa on 5 tölkkiä.

Vastaus: a) 213 tölkkiä b) 29 kerrosta c) 5 tölkkiä

244.

a) Lasketaan kuudennen rivin istumapaikkojen määrä eli jonon 6. jäsen.

$a_6 = 30 \cdot 6 + 40 = 180 + 40 = 220$

Kuudennella rivillä on 220 paikkaa.

b) Ratkaistaan kuinka monennella rivillä paikkoja on 880 eli ratkaistaan yhtälö $a_n = 880$.

$$\begin{aligned} a_n &= 880 \\ 30n + 40 &= 880 \\ n &= 28 \end{aligned}$$

Katsomossa on 28 riviä.

Vastaus: a) 220 paikkaa   b) 28 riviä

245.

a) Kirjoitetaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä näkyviin.

1. jäsen: $a_1 = 3{,}0$

2. jäsen: $a_2 = 3{,}0 + 0{,}4$

3. jäsen: $a_3 = 3{,}0 + 0{,}4 + 0{,}4 = 3{,}0 + 0{,}4 \cdot 2$

4. jäsen: $a_4 = 3{,}0 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}4 = 3{,}0 + 0{,}4 \cdot 3$

Havaitaan, että jono yleinen eli *n*:s jäsen on

$a_n = 3{,}0 + 0{,}4 \cdot (n-1) = 3{,}0 + 0{,}4n - 0{,}4 = 2{,}6 + 0{,}4n$.

b) Mustikoiden määrä tulee olla yli 12 litraa. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se (laskimella).

$$\begin{aligned} a_n &> 12 \\ 2{,}6 + 0{,}4n &> 12 \\ n &> 23{,}5 \end{aligned}$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 23{,}5$ on 24. Joten 24. kerralla Lotta keräsi yli 12 litraa mustikoita.

Vastaus: $a_n = 2{,}6 + 0{,}4n$ b) 24. kerralla

246.

a) Lasketaan kuudennen lyhennyksen jälkeisen lainan määrä eli jonon 6. jäsen.

$a_6 = 3200 - 150 \cdot 6 = 3200 - 900 = 2300$

Joonalla on kuuden lyhennyksen jälkeen lainaa 2 300 €.

b) Lainan alkuperäinen määrä saadaan laskemalla lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 ja lisäämällä siihen ensimmäinen maksettu lyhennys 150 €.

$a_1 + 150 = 3200 - 150 \cdot 1 + 150 = 3200$

Joona otti 3 200€ lainan.

c) Lopuksi lainan jäljellä oleva määrä tulee olla 0. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ 3200 - 150n &= 0 \\ n &= 21,33... \end{aligned}$$

Tarvitaan siis enemmän kuin 21 lyhennyskertaa. Joonan pitää lyhentää lainaa 22 kertaa.

d) Viimeinen lyhennyksen määrä saadaan laskemalla kuinka paljon lainaa on jäljellä 21 lyhennyskerran jälkeen.

$a_{21} = 3200 - 150 \cdot 21 = 3200 - 3150 = 50$

Viimeinen lyhennyksen suuruus on 50 €.

Vastaus: a) 2 300 € b) 3 200 € c) 22 lyhennyskertaa d) 50 €

247.

a) Kirjoitetaan lukujonon ensimmäisiä jäseniä näkyviin.

1. jäsen (tulos 1 vuoden kuluttua): $a_1 = 20\,000 \cdot 1{,}05$

2. jäsen (tulos 2 vuoden kuluttua): $a_2 = 20\,000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 20\,000 \cdot 1{,}05^2$

3. jäsen (tulos 3 vuoden kuluttua): $a_3 = 20\,000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 20\,000 \cdot 1{,}05^3$

Havaitaan, että jonon yleinen jäsen on $a_n = 20\,000 \cdot 1{,}05^n$.

b) Lasketaan yrityksen tulos 10 vuoden kuluttua eli jonon 10. jäsen.

$a_{10} = 20000 \cdot 1{,}05^{10} = 32577{,}892... \approx 32\,600$

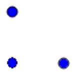
Yrityksen tulos 10 vuoden kuluttua on n. 32 600€.

Vastaus: a) $a_n = 20\,000 \cdot 1{,}05^n$ b) 32 600 €

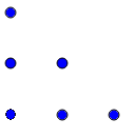
248.

a)

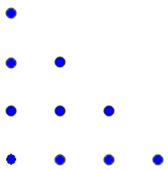
$k_1 = 1$



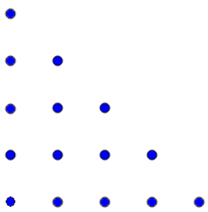
$k_2 = 3$



$k_3 = 6$



$k_4 = 10$



$k_5 = 15$

b) Pisteikössä on kaksi kertaa kolmioluku k_n. Toisaalta pisteikön leveys on $n + 1$ pistettä ja korkeus on n pistettä. Saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista kolmioluvun k_n lauseke.

$$2 \cdot k_n = n \cdot (n+1) \quad \Big| :2$$
$$k_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) $k_{1000} = \frac{1000(1000+1)}{2} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} 500 \cdot 1001 = 500\,500$

Luku 5.2

249.

a) Lukujonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = 2a_{n-1} - 4$ avulla.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 - 4 \\ &= 2 \cdot 3 - 4 \\ &= 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 - 4 \\ &= 2 \cdot 2 - 4 \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 2a_3 - 4 \\ &= 2 \cdot 0 - 4 = -4 \end{aligned}$$

Lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä on 3, 2, 0 ja –4.

b) Lukujonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = -3a_{n-1}$ avulla.

$$\begin{aligned} a_2 &= -3a_1 \\ &= -3 \cdot (-2) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -3a_2 \\ &= -3 \cdot 6 = -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= -3a_3 \\ &= -3 \cdot (-18) = 54 \end{aligned}$$

Lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä on –2, 6, –18 ja 54.

Vastaus: a) 3, 2, 0 ja –4   b) –2, 6, –18 ja 54

250.

Lukujonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}+1}$ avulla.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{a_1+1} \\
&= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{a_2+1} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{a_3+1} \\
&= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä on $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{5}$.

251.

Lukujonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = 5 - 2_{n-1}$ avulla.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 5 - 2a_1 \\
&= 5 - 2 \cdot 3 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= 5 - 2a_2 \\
&= 5 - 2 \cdot (-1) = 5 + 2 = 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_4 &= 5 - 2a_3 \\
&= 5 - 2 \cdot 7 = -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5 &= 5 - 2a_4 \\
&= 5 - 2 \cdot (-9) = 23
\end{aligned}
$$

Lukujonon 5 jäsen on 23 eli $a_5 = 23$.

252.

a) Lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä on −5, −1 ja 3. Koska toisesta jäsenestä alkaen jonon jokainen jäsen saadaan lisäämällä edelliseen sama luku, ja voidaan päätellä, että lisättävä luku on 4.

$a_1 = -5$
$a_2 = -5 + 4 = -1$
$a_3 = -1 + 4 = 3$
$a_4 = 3 + 4 = 7$

b) Koska lukujonon seuraava jäsen toisesta jäsenestä alkaen saadaan lisäämällä luku 4 edelliseen jäseneen, niin rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Vastaus: a) $a_4 = 7$ b) $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

253.

a) Lukujonon kolme ensimmäistä jäsentä on 100, 50, 25. Koska toisesta jäsenestä alkaen seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen samalla luvulla, voidaan päätellä, että kertoja on $\frac{1}{2}$.

$$a_1 = 100$$
$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$
$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$
$$a_4 = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$$

b) Koska lukujonon seuraava jäsen saadaan toisesta jäsenestä alkaen kertomalla edellinen jäsen luvulla $\frac{1}{2}$, niin rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Vastaus: a) $a_4 = 12{,}5$ b) $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

254.

a) $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$. Kolmannesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet saadaan säännön $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$ avulla.

$$\begin{aligned} a_3 &= 3a_2 + a_1 \\ &= 3\cdot 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= 3a_3 + a_2 \\ &= 3\cdot 7 + 2 = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 3a_4 + a_3 \\ &= 3\cdot 23 + 7 = 76 \end{aligned}$$

Lukujonon viides jäsen on 76.

b) $a_1 = -3$, $a_2 = 2$ ja $a_3 = -1$. Neljännestä jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet saadaan säännön $a_n = (a_{n-2} + a_{n-3})\cdot a_{n-1}$ avulla.

$$\begin{aligned} a_4 &= (a_2 + a_1)\cdot a_3 \\ &= (2 + (-3))\cdot(-1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= (a_3 + a_2)\cdot a_4 \\ &= (-1 + 2)\cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Lukujonon viides jäsen on 1.

Vastaus: a) $a_5 = 76$ b) $a_5 = 1$

255.

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ ja $a_3 = 1$. Neljännestä jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet saadaan säännön

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-3}}$ avulla.

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{a_1}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{5}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_4 + a_3}{a_2}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} + 1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{1} = 14$$

Lukujonon viides jäsen on 14.

Vastaus: $a_5 = 14$

256.

a) Koska lukujono on rekursiivinen, 10 jäsenen määrittämiseksi tarvitaan kaikki 9 edellistä jäsentä.

Tarkastellaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelman avulla.

1. Syötä ensimmäiseen sarakkeeseen ensimmäiselle riville ensimmäinen jäsen $a_1 = -4$.

2. Kirjoita toiselle riville kaava, jolla saat laskettua toisen jäsenen arvon. Kirjoita kaava soluviittausten avulla.

	A
1	-4
2	$=1+3\cdot a_1$
3	

Kirjoita kaava käyttäen soluviittausta.

3. Kopioi kaavaa niin monta kertaa, että saat rivillä 10 olevan jäsenen näkyviin.

	A
1	-4
2	-11
3	-32
…	
10	-68891

Lukujonon 10. jäsen on –68 891.

b) Jatketaan edellistä tehtävää, että saadaan lukujonon 16 jäsen.

	A
1	-4
…	
10	-68891
…	
16	-50221175

Lukujonon 16. jäsen on 50 221 175.

Vastaus: $a_{10} = -68\,891$ b) $a_{16} = 50\,221\,175$

257.

a) $a_1 = 2$. Toisesta jäsenestä alkaen lukujonon jäsenet saadaan säännön $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$ avulla.

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12}$$
$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{2}{a_3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408}$$
$$a_5 = \frac{1}{2}\left(a_4 + \frac{2}{a_4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}\right) = \frac{665857}{470832}$$

b) Koska lukua $a_5 = \frac{665857}{470832}$ verrataan lukuun $\sqrt{2}$, perusarvona on $\sqrt{2}$. Lasketaan kuinka monta prosenttia a_5 poikkeaa arvosta $\sqrt{2}$.

$$\frac{\frac{665857}{470832} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1{,}1313\ldots \cdot 10^{-12} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-12} = 1{,}1 \cdot 10^{-10}\%.$$

Siis a_5 eroaa $1{,}1 \cdot 10^{-10}$ % luvusta $\sqrt{2}$.

Vastaus: a) $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12}$, $a_4 = \frac{577}{408}$ ja $a_4 = \frac{577}{408}$. b) $1{,}1 \cdot 10^{-10}$ %.

258.

a) Koska lukujono on rekursiivinen, 10. jäsenen määrittämiseksi tarvitaan kaikki 9 edellistä jäsentä. Tarkastellaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A
1	4
2	$=\frac{a_1}{3}=\frac{4}{3}$
3	$\frac{4}{9}$
…	
10	$\frac{4}{19683}$

Kirjoita kaava käyttäen soluviittausta.

Jonon 10. jäsen on $\frac{4}{19683}=2{,}0322...\cdot 10^{-4}$

b) Koska lukujono on rekursiivinen, 10. jäsenen määrittämiseksi tarvitaan kaikki 9 edellistä jäsentä. Tarkastellaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$=a_1-a_2=\frac{1}{6}$
…	
10	$\frac{5}{6}$

Kirjoita kaava käyttäen soluviittauksia.

Jonon 10. jäsen on $\frac{5}{6}=0{,}8333...$.

Vastaus: a) $a_{10}=\frac{4}{19683}$ b) $a_{10}=\frac{5}{6}$

259.

a) Koska lukujono on rekursiivinen, 20. jäsenen määrittämiseksi tarvitaan kaikki 19 edellistä jäsentä. Tarkastellaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A
1	1
2	2
3	$= a_2 - 3a_1 = -1$
…	
20	-742

Kirjoita kaava käyttäen soluviittauksia.

Jonon 20. jäsen on -742.

b) Summa saadaan laskettua taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B
1	1	
2	2	
3	-1	
…		
20	-742	=summa(A1:A20) = –26025

Summan kaava voi olla myös esimerkiksi 'sum(a1:a20)'

Vastaus: a) $a_{20} = -742$ b) 26 025

260.

a) Koska lukujono on rekursiivinen, 20. jäsenen määrittämiseksi tarvitaan kaikki 19 edellistä jäsentä. Tarkastellaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A
1	-2
2	$=\frac{2}{a_1}+3=2$
3	4
…	
20	3,56

Kirjoita kaava käyttäen soluviittausta.

Jonon 20. jäsen on 3,56.

b) Summa saadaan laskettua taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B
1	-2	
2	2	
3	4	
…		
20	3,56	=summa(A1:A20) = 64,49

Summan kaava voi olla myös esimerkiksi 'sum(a1:a20)'

Vastaus: a) $a_{20} \approx 3,56$ b) Summa on n. 64,49

261.

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \ n = 4,5,6,... \end{cases}$

b) Koska lukujono on rekursiivinen, 18. jäsenen määrittämiseksi tarvitaan kaikki 17 edellistä jäsentä. Tarkastellaan lukujonoa taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A
1	1
2	1
3	2
4	$=a_3 + a_2 + a_1 = 4$
…	
18	19513

Kirjoita kaava käyttäen soluviittauksia

c) Summa saadaan laskettua taulukkolaskentaohjelman avulla.

	A	B
1	1	
2	1	
3	2	
4	$=a_3 + a_2 + a_1 = 4$	
…		
18	19513	=summa(A1:A18) = 42762

Summan kaava voi olla myös esimerkiksi 'sum(a1:a18)'

Vastaus: a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \ n = 4,5,6,... \end{cases}$ b) $a_{18} = 19\,513$ c) summa on 42 762

262. Lukujonon kolmas jäsen 12 saadaan esimerkiksi kertomalla kahden ensimmäisen jäsenen summa luvulla 2. Tällöin rekursiokaavaksi käy esimerkiksi

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 5 \\ a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}), \text{ kun } n = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

jolloin $a_4 = 34$, $a_5 = 92$ ja $a_6 = 252$.

263.

a) $a_1 = 10$ ja $a_2 = 15$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 10 + 15 = 25$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 15 + 25 = 40$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 40 + 25 = 65$$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$ ja $a_2 = \frac{1}{4}$

$$a_3 = a_2 + a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

Vastaus: a) $a_3 = 25$, $a_4 = 40$, $a_5 = 65$ b) $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = 1$ ja $a_5 = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

264.

a) Ensimmäisenä vuonna alueella susia on 50, joten lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 50$.

Alueen susikanta kasvaa keskimäärin 20 % vuodessa eli tulee vuosittain 1,2-kertaiseksi (100 % + 20 % = 120 % = 1,2).

Kun alueelta kaadetaan 8 sutta, kuvaa susien määrää lauseke $1{,}2 \cdot 50 - 8$.

Siis $a_2 = 1{,}2 \cdot 50 - 8 = 1{,}2a_1 - 8$.

Vastaavasti $a_3 = 1{,}2a_2 - 8$.

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 50 \\ a_n = 1{,}2a_{n-1} - 8, \text{ kun } n = 2,3,4,... \end{cases}$$

b) Lukujonon 16. jäsen kuvaa susien määrää 15 vuoden kuluttua. Kysytty susien määrä on siis lukujonon 16. jäsen, joka voidaan laskea taulukkolaskennan avulla.

	A
1	50
2	$=1{,}2 \cdot a_1 - 8$
…	
15	194

15 vuoden kuluttua alueella on siis 194 sutta.

Vastaus: a) $\begin{cases} a_1 = 50 \\ a_n = 1{,}2a_{n-1} - 8, \text{ kun } n = 2,3,4,... \end{cases}$ b) 194 sutta

265.

a) Ainetta on alussa 100 g, joten lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 100$.

Aineen massa puolittuu joka tunti, joten aineen massaa tunnin päästä kuvaa lauseke $\frac{100}{2}$.

Siis $a_2 = \frac{100}{2} = \frac{a_1}{2}$.

Vastaavasti $a_3 = \frac{a_2}{2}$.

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

b) Lukujonon 13. jäsen kuvaa radioaktiivisen aineen määrää 12 tunnin kuluttua. Kysytty radioaktiivisen aineen määrä on siis lukujonon 13. jäsen, joka voidaan laskea taulukkolaskennan avulla.

	A
1	100
2	$=a_1/2$
…	
13	0,024

$a_{13} = 0{,}024 \text{ g} = 24 \text{ mg}$

12 tunnin kuluttua ainetta on jäljellä 24 mg.

Vastaus: a) $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2}, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ b) 24 mg

266.
Toukokuun alussa altaaseen istutetaan 5000 kirjolohta, joten lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5000$.

Viikon aikana altaan kirjolohista pyydetään noin 20 %, minkä jälkeen kirjolohista on jäljellä 80 %. Kirjolohien määrä tulee siis 0,8-kertaiseksi.

Kun altaaseen lisätään seuraavan viikon alussa 100 uutta kirjolohta, kuvaa altaassa olevien kirjolohien määrää toisen viikon alussa lauseke $0,8 \cdot 5000 + 100$.

Siis $a_2 = 0,8 \cdot 5000 + 100 = 0,8a_1 + 100$.

Vastaavasti $a_3 = 0,8a_2 + 100$.

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 5000 \\ a_n = 0,8 \cdot a_{n-1} + 100, \text{ kun } n = 2,3,4,\ldots \end{cases}$$

Lukujonon 21. jäsen kuvaa altaan kirjolohimäärää 20 viikon kuluttua. Kysytty kalojen määrä on siis lukujonon 21. jäsen, joka voidaan laskea taulukkolaskennan avulla.

	A
1	5000
2	$=0,8 \cdot a_1 + 100$
…	
21	551,88…

$a_{21} = 551,88\ldots \approx 550$

Altaassa on noin 550 kalaa kalastussesongin päätyttyä.

Vastaus: 550 kalaa

267.

a) Yrityksen tulos ensimmäisenä vuonna oli 20 000 €, joten lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 20\,000$.

Yrityksen tulos kasvaa 5 % vuodessa, joten tulos tulee 1,05-kertaiseksi (100 % + 5 % = 105 % = 1,05). Yrityksen tulosta toisen vuoden alussa kuvaa lauseke $1{,}05 \cdot 20000$.

Siis $a_2 = 1{,}05 \cdot 20000 = 1{,}05a_1$.

Vastaavasti $a_3 = 1{,}05 \cdot a_2$.

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 20\,000 \\ a_n = 1{,}05a_{n-1}, \text{ kun } n = 2,3,4,\ldots \end{cases}$$

b) Lasketaan lukujonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla. Selvitetään kuinka mones jäsen on ensimmäinen, joka on noin $2 \cdot 20000 = 40000$.

	A
1	20000
2	$=1{,}05 \cdot a_1$
…	
15	39598,63…
16	41578,56…

15. vuotena yrityksen tulos on likimain 40 000 €, joten yrityksen tulos on kaksinkertaistunut 14 vuoden kuluttua.

Vastaus: 15. vuotena eli 14 vuoden kuluttua

Luku 5.3

268.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 12$. Koska seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 3, on jonon differenssi $d = 3$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 12 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 12 + 3n - 3 \\ &= 3n + 9 \end{aligned}$$

b) Lasketaan jonon differenssi.

$$d = a_2 - a_1 = 4 - 10 = -6$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + (n-1)\cdot(-6) \\ &= 10 - 6n + 6 \\ &= -6n + 16 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $a_n = 3n + 9$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ b) $a_n = -6n + 16$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

269.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja differenssi $d = 2$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1)\cdot 2 \\ &= 3 + 2n - 2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

b) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$ ja differenssi $d = 5$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 4 + 5n - 5 \\ &= 5n - 1 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $a_n = 2n + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ b) $a_n = 5n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

270.

a) Lasketaan differenssi.

$$d = a_2 - a_1 = 20 - 2 = 18$$

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1)\cdot 18 \\ &= 2 + 18n - 18 \\ &= 18n - 16 \end{aligned}$$

b) Lasketaan differenssi.

$$d = a_2 - a_1 = -27 - (-32) = 5$$

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -32 + (n-1)\cdot 5 \\ &= -32 + 5n - 5 \\ &= 5n - 37 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $a_n = 18n - 16$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ b) $a_n = 5n - 37$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

271.

a) Ensimmäinen jäsen $a_1 = 15$.

Jonon differenssi on $d = a_2 - a_1 = 19 - 15 = 4$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 15 + (n-1) \cdot 4 = 15 + 4n - 4 = 4n + 11$$

Lasketaan 120. jäsen sijoittamalla $n = 120$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{120} = 4 \cdot 120 + 11 = 491$$

b) Jos luku 2 344 on tämän jonon jäsen, on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = 2344$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 2344 \\ 4n + 11 &= 2344 && |-11 \\ 4n &= 2333 && |:4 \\ n &= 583{,}25 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisu ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 2 344 ei ole tämän lukujonon jäsen.

c) Yleisen jäsenen tulee olla pienempi kuin 20 000. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &< 20000 \\ 4n + 11 &< 20000 && |-11 \\ 4n &< 19989 && |:4 \\ n &< 4997{,}25 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 4997{,}25$ on 4 997. Siis lukujonon 4 997 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 20 000.

Vastaus: a) $a_n = 4n + 11$, $a_{120} = 491$ b) ei ole c) 4 997 jäsentä

272.

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$ ja differenssi $d = -4$. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= 4 - 4n + 4 \\ &= -4n + 8 \end{aligned}$$

Koska luku –520 on jonon jäsen, on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = -520$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} a_n &= -520 \\ -4n + 8 &= -520 && \vert -8 \\ -4n &= -528 && \vert : (-4) \\ n &= 132 \end{aligned}$$

Joten luku –520 on jonon 132. jäsen.

b) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -1000$ ja differenssi $d = 3$. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -1000 + (n-1) \cdot 3 \\ &= -1000 + 3n - 3 \\ &= 3n - 1003 \end{aligned}$$

Koska luku –520 on jono jäsen, on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = -520$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= -520 \\ 3n - 1003 &= -520 && \vert +1003 \\ 3n &= 483 && \vert : 3 \\ n &= 161 \end{aligned}$$

Joten luku –520 on 161. jäsen.

Vastaus: a) 132. jäsen b) 161. jäsen

273.

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 95$ ja differenssi $d = -7$. Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 95 + (n-1)\cdot(-7) \\ &= 95 - 7n + 7 \\ &= -7n + 102 \end{aligned}$$

Luku 0 on jonon jäsen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ -7n + 102 &= 0 \\ -7n &= -102 \quad && \vert :(-7) \\ n &= 14{,}57142 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisu ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 0 ei ole tämän lukujonon jäsen.

b) Luku –346 on jonon jäsen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = -346$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= -346 \\ -7n + 102 &= -346 \quad && \vert -102 \\ -7n &= -448 \quad && \vert :(-7) \\ n &= 64 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisu on positiivinen kokonaisluku 64, niin luku –346 on lukujonon 64. jäsen.

c) Yleisen jäsenen tulee olla suurempi kuin –600. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} a_n &> -600 \\ -7n + 102 &> -600 \quad && \vert -102 \\ -7n &> -702 \quad && \vert :(-7) \\ n &< 100{,}28\ldots \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku joka toteuttaa ehdon $n < 100{,}28\ldots$ on 100.

Lukujonon 100 ensimmäistä jäsentä ovat suurempia kuin –600.

Vastaus: a) ei ole b) on (64. jäsen) c) 100

274.

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$ ja differenssi $d = 5.$ Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 2 + 5n - 5 \\ &= 5n - 3 \end{aligned}$$

Lasketaan 20. jäsen sijoittamalla $n = 20$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

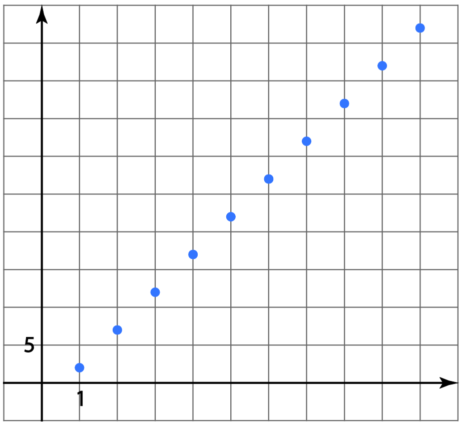
$$a_{20} = 5\cdot 20 - 3 = 100 - 3 = 97$$

b) Luku 52 on jonon jäsen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = 52.$
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n.$

$$\begin{aligned} a_n &= 52 \\ 5n - 3 &= 52 && \mid +3 \\ 5n &= 55 && \mid :5 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Koska yhtälön ratkaisu on positiivinen kokonaisluku 11, luku 52 on lukujonon 11 jäsen.

c)



275.

Yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi d.

Kirjoitetaan lukujonon 10. jäsen 3. jäsenen $a_3 = -11$ ja differenssin d avulla.

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_3 + (10-3)d \\ &= a_3 + 7d \\ &= -11 + 7d \end{aligned}$$

Koska $a_{10} = -39$, voidaan d ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} -11 + 7d &= -39 && \Big| +11 \\ 7d &= -28 && \Big| :7 \\ d &= -4 \end{aligned}$$

Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$ joten lukujonon kolmas jäsen on $a_3 = a_1 + (3-1) \cdot (-4) = a_1 - 8.$

Koska $a_3 = -11$, voidaan a_1 ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} a_1 - 8 &= -11 \\ a_1 &= -11 + 8 = -3 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -3 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= -3 - 4n + 4 \\ &= -4n + 1 \end{aligned}$$

Yleisen jäsenen lauseke on siis $a_n = -4n + 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Vastaus: $a_n = -4n + 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

276.

a) Yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$ ja differenssi d.

Koska $a_4 = a_1 + (4-1)\cdot d = 2 + 3d$ ja toisaalta $a_4 = 20$, voidaan d ratkaista yhtälön avulla.

$$
\begin{aligned}
2 + 3d &= 20 \\
3d &= 20 - 2 \\
3d &= 18 \quad \Big| :3 \\
d &= 6
\end{aligned}
$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d \\
&= 2 + (n-1)6 \\
&= 2 + 6n - 6 \\
&= 6n - 4
\end{aligned}
$$

Jonon yleisen jäsenen lauseke on siis $a_n = 6n - 4, n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Luku 60 on jonon jäsen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = 60$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 60 \\
6n - 4 &= 60 \\
6n &= 60 + 4 \\
6n &= 64 \quad \Big| :6 \\
n &= \frac{64}{6} = 10\frac{4}{6} = 10\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Koska yhtälön ratkaisu ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 60 ei ole lukujonon jäsen.

Vastaus: a) $a_n = 6n - 4, n = 1, 2, 3, \ldots$ b) ei ole

277.

a) Määritetään jonon yleisen jäsenen lauseke. Yleisen jäsenen lausekkeen määrittämiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi $d=-7$.

Aritmeettisen jonon 9. jäsen on $a_9=a_1+(n-1)d=a_1+(9-1)(-7)=a_1-56$ ja toisaalta $a_9=-51$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a_1.

$$a_1-56=-51$$
$$a_1=-51+56=5$$

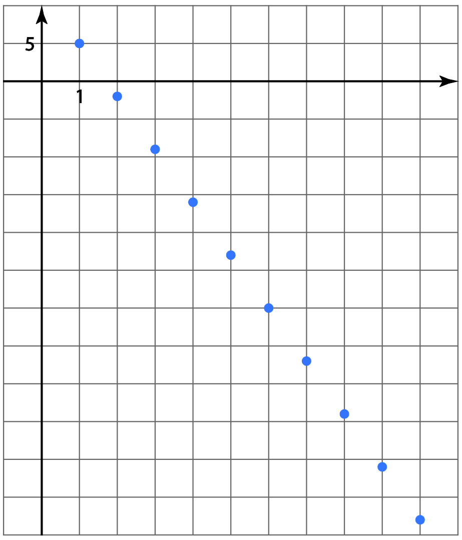
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(n-1)d\\&=5+(n-1)\cdot(-7)\\&=5-7n+7\\&=-7n+12\end{aligned}$$

a_{1500} saadaan sijoittamalla $n=1500$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{1500}=-7\cdot 1500+12=-10\,488$$

b)



Vastaus: a) $a_{1500}=-10\,488$

278.

a) Kirjoitetaan aritmeettisen jonon 55. jäsen 50. jäsenen $a_{50}=-278$ ja differenssin d avulla.

$$a_{55}=a_{50}+(55-50)d=-278+5d$$

Koska $a_{55}=-308$, voidaan d ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}-278+5d&=-308\\ d&=-6\end{aligned}$$

Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on muotoa $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, joten lukujonon 50. jäsen on $a_{50}=a_1+(50-1)\cdot(-6)=a_1-294$. Koska $a_{50}=-278$, voidaan a_1 ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}a_1-294&=-278\\ a_1&=16\end{aligned}$$

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1=16$ ja differenssi $d=-6$.

b) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n&=16+(n-1)\cdot(-6)\\ &=16-6n+6\\ &=-6n+22\end{aligned}$$

Yleisen jäsenen lauseke $a_n=-6n+22, n=1,2,3,...$

Vastaus: a) $a_1 = 16$ ja $d=-6$ b) $a_n=-6n+22, n=1,2,3,...$

279.

Yleisen jäsenen lausekkeen määrittämiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja differenssi d.

Koska $a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = 3+6d$ ja toisaalta $a_7 = -9$, voidaan d ratkaista yhtälön avulla.

$$
\begin{aligned}
3+6d &= -9 && \Big| -3 \\
6d &= -12 && \Big| :6 \\
d &= -2
\end{aligned}
$$

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3+(n-1)\cdot(-2) \\
&= 3-2n+2 \\
&= -2n+5
\end{aligned}
$$

Yleisen jäsenen lauseke $a_n = -2n+5, n = 1,2,3,\ldots$

Lasketaan a_{30} sijoittamalla $n = 30$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{30} = -2\cdot 30+5 = -55$$

Vastaus: a) $a_n = -2n+5, n = 1,2,3,\ldots$ b) $a_{30} = -55$

280.

Aritmeettisen jonon viides jäsen $a_5 = \frac{3}{2}$ ja differenssi $d = \frac{1}{4}$.

Koska $a_5 = a_1 + (5-1)d = a_1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = a_1 + 1$ ja toisaalta $a_5 = \frac{3}{2}$, niin differenssi d voidaan ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} a_1 + 1 &= \frac{3}{2} \\ a_1 &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 19. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{19} &= a_1 + (19-1) \cdot d \\ &= \frac{1}{2} + 18 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{19} = 5$

281.

a) a_{n+1} saadaan sijoittamalla yleisen jäsenen lausekkeeseen $n = n+1$. Määritetään termi a_{n+1}.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -3((n+1)-2) \\ &= -3(n+1-2) \\ &= -3(n-1) \\ &= -3n+3 \end{aligned}$$

b) Jono on aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina sama. a_n ja a_{n+1} on kaksi mielivaltaista peräkkäistä jäsentä. Lasketaan näiden termien erotus.

$$a_{n+1} - a_n = -3n + 3 - (-3(n-2)) = -3n + 3 - (-3n + 6) = -3n + 3n + 3 - 6 = -3$$

Koska kahden peräkkäisen jäsenen erotus on –3 riippumatta n:n arvosta, on jono aritmeettinen.

282.

a) Tutkitaan onko jono aritmeettinen laskemalla kahden mielivaltaisen peräkkäisen termin erotus $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = (8(n+1) - 5) - (8n - 5) = 8n + 8 - 5 - 8n + 5 = 8$$

Kahden peräkkäisen termin erotus on siis aina 8 ja jono on aritmeettinen. Jonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan lisäämällä luku 8 edelliseen jäseneen. Jonon ensimmäinen termi on $a_1 = 8 \cdot 1 - 5 = 3$.

Nyt voidaan muodostaa jonon rekursiivinen muoto:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 8,\ n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

b) Tutkitaan onko jono aritmeettinen laskemalla kahden mielivaltaisen peräkkäisen termin erotus $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = (14 - 2(n+1)) - (14 - 2n) = 14 - 2n - 2 - 14 + 2n = -2$$

Kahden peräkkäisen termin erotus on siis aina -2 ja jono on aritmeettinen. Jonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan lisäämällä luku -2 edelliseen jäseneen. Jonon ensimmäinen termi on $a_1 = 14 - 2 \cdot 1 = 12$.

Nyt voidaan muodostaa jonon rekursiivinen muoto:

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_{n-1} - 2, n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Vastaus: a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 8,\ n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_{n-1} - 2, n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$

283.

Jono on aritmeettinen täsmälleen silloin kun sen peräkkäisten jäsenien erotus on vakio.
Nyt $a_1 = x - 2$, $a_2 = 5$ ja $a_3 = 3x + 4$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x.

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= a_3 - a_2 \\ 5-(x-2) &= (3x+4)-5 \\ 5-x+2 &= 3x-1 \\ -x+7 &= 3x-1 \\ -x-3x &= -1-7 \\ -4x &= -8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan jonon kolme ensimmäistä jäsentä.

$a_1 = x-2 = 2-2 = 0$

$a_2 = 5$

$a_3 = 3x+4 = 3\cdot 2+4 = 10$

Artimeettisen jonon differenssi on siis 5 ja jonon 4. jäsen on $a_4 = a_3 + 5 = 10 + 5 = 15$.

Vastaus: a) $x = 2$ b) $a_4 = 15$

284.

a) Koska lenkin pituus kasvaa joka viikko yhtä paljon, muodostavat lenkkien pituudet aritmeettisen jonon. Merkitään lenkin pituuden muutosta kirjaimella d. Jonon yleinen jäsen a_n kertoo lenkin pituuden viikolla n.

Ensimmäinen jäsen $a_1 = 3{,}2$. Koska kahdeksas jäsen $a_8 = a_1 + (8 - 1)d = 3{,}2 + 7d$ ja toisaalta $a_8 = 6{,}0$, voidaan d ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 3{,}2 + 7d &= 6{,}0 \\ d &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Toisella viikolla lenkin pituus on $a_2 = 3{,}2 + 0{,}4 = 3{,}6$ (km).

b) Lasketaan lenkin pituus 10. viikolla eli a_{10} sijoittamalla $a_1 = 3{,}2$ ja $d = 0{,}4$ aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (10 - 1)d \\ &= 3{,}2 + 9 \cdot 0{,}4 \\ &= 6{,}8 \text{ (km)} \end{aligned}$$

c) Pisimmillään lenkin pituus on 10 eli jonon jäsen $a_n = 10.$ Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se (laskimella).

$$\begin{aligned} a_n &= 10 \\ 0{,}4n + 2{,}8 &= 10 \\ n &= 18 \end{aligned}$$

Jonon 18. jäsen on 10, joten lenkin pituus on 10 km 18. viikolla.

Vastaus: a) 3,6 km b) 6,8 km c) 18. viikolla

285.

Koska permannon rivien pituudet muodostavat aritmeettisen jonon, niin rivin pituus lisääntyy aina yhtä paljon, kun siirrytään rivi eteenpäin. Merkitään tätä lisäystä kirjaimella d. Jos rivin numeroa merkitään kirjaimella n, aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n kertoo rivin n pituuden.

Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 12$. Koska 10. jäsen $a_{10} = a_1 + (10 - 1)d = 12 + 9d$ ja toisaalta $a_{10} = 39$, voidaan d ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 12 + 9d &= 39 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

Lasketaan viimeisen eli 28. rivin pituus sijoittamalla $a_1 = 12$ ja $d = 3$ aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$\begin{aligned} a_{28} &= a_1 + (28 - 1)d \\ &= 12 + 27 \cdot 3 \\ &= 93 \ \ (\text{m}) \end{aligned}$$

Vastaus: 93 m

286.

a) Koska lainan lyhennys on joka kuukausi yhtä suuri, pienenee lainan määrä joka kuukausi yhtä paljon. Jäljellä olevan lainan määrät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 4200 - 200 = 4000$ ja differenssi $d = -200$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 4000 + (n-1)\cdot(-200) \\ &= 4000 - 200n + 200 \\ &= 4200 - 200n \end{aligned}$$

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 4200 - 200n, n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Lopuksi lainaa tulee olla jäljellä 0 €. Selvitetään kuinka mones jonon jäsen on 0. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ 4200 - 200n &= 0 \\ -200n &= -4200 \qquad |:(-200) \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Joten 21 kuukauden kuluttua Rebekka on maksanut lainan takaisin.

Vastaus: a) $a_n = 4200 - 200n, n = 1, 2, 3, \ldots$ b) 21 kuukauden kuluttua

287.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 400$ ja jonon differenssi $d = -25$. Koska lääkeannosta pienennetään joka päivä 25 mg, muodostavat lääkeannokset aritmeettisen jonon ja $d = -25$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 400 + (n-1)\cdot(-25) \\ &= 400 - 25n + 25 \\ &= 425 - 25n \end{aligned}$$

Yleinen jäsen $a_n = 425 - 25n, n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Lasketaan jonon 10. jäsen.

$a_{10} = 425 - 25 \cdot 10 = 425 - 250 = 175$ (mg).

c) Selvitetään kuinka monen päivän jälkeen lääkeannos on 0 mg. Muodostetaanyhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ 425 - 25n &= 0 \\ -25n &= -425 \qquad \,|: (-25) \\ n &= 17 \end{aligned}$$

17. päivänä lääkeannos on 0 mg, joten lääkekuuri kestää 16 päivää.

Vastaus: a) $a_n = 425 - 25n, n = 1, 2, 3, \ldots$ b) 175 mg c) 16 päivää

288.
Koska halkojen määrä kerroksissa muodostaa aritmeettisen jonon, niin halkojen määrä vähenee aina yhtä paljon, kun siirrytään kerros ylöspäin. Merkitään tätä vähennystä kirjaimella d. Jos kerroksen numeroa merkitään kirjaimella n, aritmeettisen jonon yleinen jäsen a_n kertoo halkojen lukumäärän kerroksessa n.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 50 + (n-1)d$$

Kuudennessa kerroksessa halkoja on 40 kpl, joten $a_6 = 40$. Yleisen jäsenen lausekkeen avulla saadaan $a_6 = 50 + (6-1)d = 50 + 5d$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan d.

$$\begin{aligned} 50 + 5d &= 40 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

Kun sijoitetaan $n = 15$ ja $d = -2$ jonon yleisen jäsenen lausekkeeseen $a_n = 50 + (n-1)d$, saadaan halkojen määrä 15. kerroksessa.
$a_{15} = 50 + (15-1)\cdot(-2) = 22$.

Vastaus: 22 halkoa

289.
Muodostetaan jäsenien a_{n+1} ja a_{n-1} lausekkeet.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -2(n+1) + 1 = -2n - 2 + 1 = -2n - 1 \\ a_{n-1} &= -2(n-1) + 1 = -2n + 2 + 1 = -2n + 3 \end{aligned}$$

Lasketaan jäsenien a_{n+1} ja a_{n-1} keskiarvo.

$$\frac{a_{n+1} + a_{n1}}{2} = \frac{(-2n-1) + (-2n+3)}{2} = \frac{-4n+2}{2} = -2n + 1$$

Havaitaan, että jäsenten a_{n+1} ja a_{n-1} keskiarvo on a_n.

290.

Monikulmio	**Kuinka moneen kolmioon voidaan jakaa?**	**Kulmien summa**
Kolmio	1	180°
Nelikulmio	2	360°
Viisikulmio	3	540°
Kuusikolmio	4	720°

Monikulmioiden kulmien summa lisääntyy aina 180°, kun kulmia lisätään 1.

Merkitaan kirjaimella n monikulmion kulmien määrää. Kun n-kulmio jaetaan kolmioihin, saadaan kolmioita aina kaksi vähemmän kuin on kulmien määrä, siis kolmiota saadaan $n - 2$ kappaletta. Siten n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = (n-2)\cdot 180^\circ$. Mielivaltaista n:ttä jäsentä seuraava jäsen on $a_{n+1} = ((n+1)-2)\cdot 180^\circ = (n-1)\cdot 180^\circ$.

Lasketaan näiden kahden peräkkäisen termin erotus.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= (n-1)\cdot 180^\circ - (n-2)\cdot 180^\circ \\
&= 180^\circ n - 180^\circ - 180^\circ n + 2\cdot 180^\circ \\
&= 180^\circ
\end{aligned}
$$

Koska peräkkäisten termien erotus on aina sama luku 180º, niin lukujono on aritmeettinen.

Luku 5.4

291.

Aritmeettinen summa voidaan laskea summakaavan avulla, kun tiedetään:

- yhteenlaskettavien määrä $n=10$,
- ensimmäinen jäsen $a_1=3$ ja
- viimeinen jäsen a_{10}.

Määritetään differenssi d ja viimeinen jäsen a_{10}.

$$d=a_2-a_1=7-3=4$$
$$a_{10}=3+(10-1)\cdot 4=3+36=39$$

Lasketaan 10 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned}S_{10}&=10\cdot\frac{a_1+a_{10}}{2}\\&=10\cdot\frac{3+39}{2}\\&=10\cdot\frac{42}{2}\\&=10\cdot 21\\&=210\end{aligned}$$

Vastaus: 210

292.

- yhteenlaskettavien määrä $n = 20$
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- differenssi $d = 2$

Määritetään viimeinen yhteenlaskettava a_{20}.

$$a_{20} = 2 + (20-1)\cdot 2 = 2 - 38 = 40$$

Lasketaan 20 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_{20} &= 20\cdot\frac{a_1 + a_{20}}{2} \\ &= 20\cdot\frac{2+40}{2} \\ &= 20\cdot 21 \\ &= 420 \end{aligned}$$

Vastaus: 420

293.

a) Jonon yleinen jäsen $a_n = 5n - 2$. Yhteenlaskettavien määrä $n = 8$.

Määritetään summan ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava jäsen, a_1 ja a_8.

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 2 = 3$$
$$a_8 = 5 \cdot 8 - 2 = 38$$

Lasketaan 8 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_8 &= 8 \cdot \frac{a_1 + a_8}{2} \\ &= 8 \cdot \frac{3 + 38}{2} \\ &= 8 \cdot \frac{41}{2} \\ &= 4 \cdot 41 \\ &= 164 \end{aligned}$$

b) Jonon yleinen jäsen $a_n = 6 - 2n$. Yhteenlaskettavien määrä $n = 8$.

Määritetään summan ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava jäsen, a_1 ja a_8.

$$a_1 = 6 - 2 \cdot 1 = 4$$
$$a_8 = 6 - 2 \cdot 8 = -10$$

Lasketaan 8 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_8 &= 8 \cdot \frac{a_1 + a_8}{2} \\ &= 8 \cdot \frac{4 + (-10)}{2} \\ &= 8 \cdot (-3) \\ &= -24 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 164 b) –24

294.

a)

- yhteenlaskettavien määrä $n = 11$
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- viimeinen jäsen $a_{11} = 52$

Lasketaan 11 jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_{11} &= 11 \cdot \frac{a_1 + a_{11}}{2} \\ &= 11 \cdot \frac{2+52}{2} \\ &= 11 \cdot 27 \\ &= 297 \end{aligned}$$

b)

- yhteenlaskettavien määrä $n = 7$
- ensimmäinen jäsen $a_1 = -90$
- viimeinen jäsen $a_7 = -60$

Lasketaan 7 jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_7 &= 7 \cdot \frac{a_1 + a_7}{2} \\ &= 7 \cdot \frac{-90+(-60)}{2} \\ &= 7 \cdot \frac{-150}{2} \\ &= 7 \cdot (-75) \\ &= -525 \end{aligned}$$

c) Lasketaan yhteen 9 999 ensimmäistä positiivista kokonaislukua, joten yhteenlaskettavien määrä $n = 9\,999$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja viimeinen jäsen $a_{9999} = 9\,999$.

Lasketaan 9 999 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_{9999} &= 9\,999 \cdot \frac{a_1 + a_{9999}}{2} \\ &= 9\,999 \cdot \frac{1+9\,999}{2} \\ &= 9\,999 \cdot 5\,000 \\ &= 49\,995\,000 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 297 b) –525 c) 49 995 000

295.

a) Aritmeettinen summa voidaan laskea summakaavan avulla, kun tiedetään yhteenlaskettavien määrä $n = 50$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 12$ ja viimeinen jäsen a_{50}.

Määritetään differenssi d ja viimeinen jäsen a_{50}.

$$d = a_2 - a_1 = 15 - 12 = 3$$
$$a_{50} = 12 + (50-1) \cdot 3 = 12 + 147 = 159$$

Lasketaan 50 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_{50} &= 50 \cdot \frac{a_1 + a_{50}}{2} \\ &= 50 \cdot \frac{12 + 159}{2} \\ &= 4275 \end{aligned}$$

b)

- yhteenlaskettavien määrä $n = 50$
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 240$
- viimeinen jäsen a_{50}

Määritetään differenssi d ja viimeinen jäsen a_{50}.

$$d = a_2 - a_1 = 227 - 240 = -13$$
$$a_{50} = 240 + (50-1) \cdot (-13) = 240 - 637 = -397$$

Lasketaan 50 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_{50} &= 50 \cdot \frac{a_1 + a_{50}}{2} \\ &= 50 \cdot \frac{240 + (-397)}{2} \\ &= -3925 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 4 275   b) –3 925

296.

Aritmeettinen summa voidaan laskea summakaavan avulla, kun tiedetään yhteenlaskettavien määrä n, ensimmäinen jäsen $a_1 = 40$ ja viimeinen jäsen $a_n = 76$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen avulla. Määritetään differenssi d ja yleinen jäsen a_n.

$$d = a_2 - a_1 = 44 - 40 = 4$$

$$\begin{aligned} a_n &= 40 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 40 + 4n - 4 \\ &= 4n + 36 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien määrä n viimeisen yhteenlaskettavan 76 avulla.

$$\begin{aligned} 4n + 36 &= 76 && \mid -36 \\ 4n &= 40 && \mid : 4 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} \\ &= 10 \cdot \frac{40 + 76}{2} \\ &= 10 \cdot \frac{116}{2} \\ &= 10 \cdot 58 \\ &= 580 \end{aligned}$$

Vastaus: 580

297.

a) Summan ensimmäinen jäsen $a_1 = -32$ ja viimeinen jäsen $a_n = 96$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen avulla. Määritetään differenssi d ja yleinen jäsen a_n.

$$d = a_2 - a_1 = -28 - (-32) = 4$$

$$\begin{aligned} a_n &= -32 + (n-1)\cdot 4 \\ &= -32 + 4n - 4 \\ &= 4n - 36 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien määrä n viimeisen yhteenlaskettavan 96 avulla.

$$\begin{aligned} a_n &= 96 \\ 4n - 36 &= 96 \\ 4n &= 132 \quad \Big| :4 \\ n &= 33 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned} S_{33} &= 33 \cdot \frac{a_1 + a_{33}}{2} \\ &= 33 \cdot \frac{-32 + 96}{2} \\ &= 1\,056 \end{aligned}$$

b) Ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja viimeinen jäsen $a_n = 1507$.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen avulla. Määritetään differenssi d ja yleinen jäsen a_n.

$$d = a_2 - a_1 = 19 - 3 = 16$$

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1)\cdot 16 \\ &= 3 + 16n - 16 \\ &= 16n - 13 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien määrä n viimeisen yhteenlaskettavan 1507 avulla.

$$\begin{aligned} a_n &= 1507 \\ 16n - 13 &= 1507 \\ 16n &= 1520 \quad \Big| :16 \\ n &= 95 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned} S_{95} &= 95 \cdot \frac{a_1 + a_{95}}{2} \\ &= 95 \cdot \frac{3 + 1507}{2} \\ &= 71\,725 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 1 056   b) 71 725

298.

Merkitään tarvittavien jäsenien lukumäärä kirjaimella n. Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -72$.

Viimeinen yhteenlaskettava jäsen saadaan yleisen jäsenen lausekkeella. Määritetään jonon differenssi d ja yleinen jäsen a_n.

$$d = a_2 - a_1 = -69 - (-72) = 3$$

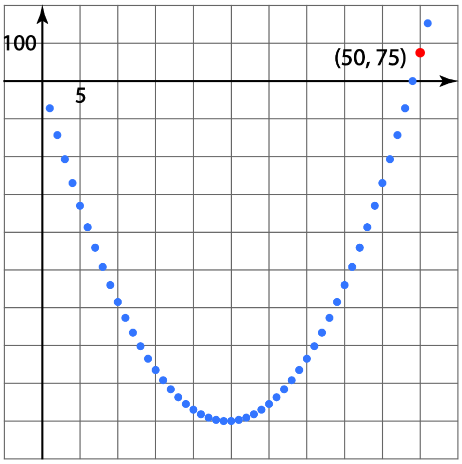
$$\begin{aligned} a_n &= -72 + (n-1)\cdot 3 \\ &= -72 + 3n - 3 \\ &= 3n - 75 \end{aligned}$$

Aritmeettinen summa voidaan laskea summakaavalla, kun tiedetään yhteenlaskettavien lukumäärä n, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -72$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 3n - 75$.

Muodostetaan summalle lauseke.

$$\begin{aligned} S_n &= n\cdot\frac{-72 + 3n - 75}{2} \\ &= n\cdot\frac{3n - 147}{2} \\ &= \frac{3n^2 - 147n}{2} \end{aligned}$$

Piirretään summalausekkeen kuvaaja ja etsitään kuvaajalta kohta, jossa summan arvo ylittää ensimmäisen kerran arvon 0.



On laskettava yhteen 50 jäsentä.

Vastaus: 50 jäsentä

299.

Merkitään tarvittavien jäsenien lukumäärä kirjaimella n. Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -5$.

Viimeinen yhteenlaskettava jäsen saadaan yleisen jäsenen lausekkeella. Määritetään jonon differenssi d ja yleinen jäsen a_n.

$$d = a_2 - a_1 = -7 - (-5) = -2$$

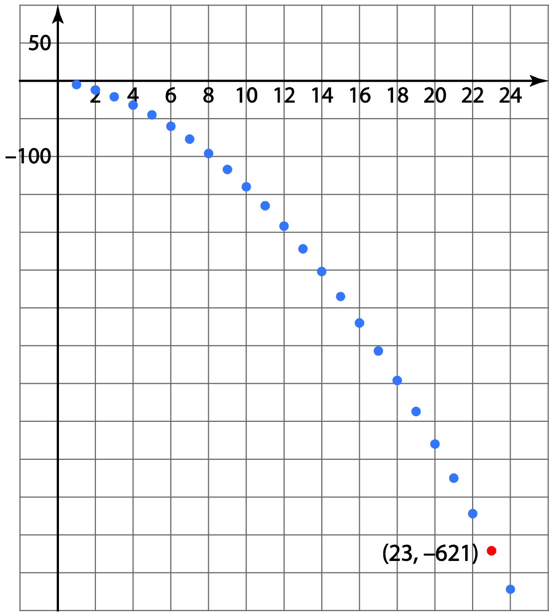
$$\begin{aligned} a_n &= -5 + (n-1)\cdot(-2) \\ &= -5 - 2n + 2 \\ &= -2n - 3 \end{aligned}$$

Aritmeettinen summa voidaan laskea summakaavalla, kun tiedetään yhteenlaskettavien lukumäärä n, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -5$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_n = -2n - 3$.

Muodostetaan summalle lauseke.

$$\begin{aligned} S_n &= n \cdot \frac{-5 + (-2n-3)}{2} \\ &= n \cdot \frac{-5 - 2n - 3}{2} \\ &= n \cdot (-n-4) \\ &= -n^2 - 4n \end{aligned}$$

Piirretään summalausekkeen kuvaaja ja etsitään kuvaajalta kohta, jossa summan arvo alittaa ensimmäisen kerran arvon -600.



On laskettava yhteen vähintään 23. jäsentä.

Vastaus: vähintään 23 jäsentä

300.

a) Merkinnästä nähdään, että

- Jonon yleinen jäsen on $a_n = 2n - 1$
- ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- viimeinen yhteenlaskettava on $a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$
- yhteenlaskettavia on 5 kappaletta.

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$\begin{aligned} S_5 &= 5 \cdot \frac{1+9}{2} \\ &= 5 \cdot 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

b) Merkinnästä nähdään, että

- Jonon yleinen jäsen on $a_n = n + 3$
- ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4 + 3 = 7$
- viimeinen yhteenlaskettava on $a_{10} = 10 + 3 = 13$
- yhteenlaskettavia on 7 kappaletta.

Lasketaan aritmeettinen summa

$$\begin{aligned} S_7 &= 7 \cdot \frac{7+13}{2} \\ &= 7 \cdot 10 \\ &= 70 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 25 b) 70

301.

a) Lasketaan jonon differenssi d ja muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$d = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$$

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 5 + 2n - 2 \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

Viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku on 9. Nyt voidaan merkitä $\sum_{n=1}^{9}(2n+3)$.

b) Lasketaan jonon differenssi d ja muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$d = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$$

$$\begin{aligned} a_n &= 10 + (n-1) \cdot (-3) \\ &= 10 - 3n + 3 \\ &= -3n + 13 \end{aligned}$$

Viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku on 7. Nyt voidaan merkitä $\sum_{n=1}^{7}(-3n+13)$.

c) Lasketaan jonon differenssi d ja muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$d = a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku on 6. Nyt voidaan merkitä $\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right)$.

302.

Jonon summa on 16, ensimmäinen yhteenlaskettava jäsen $a_1 = -\frac{1}{3}$ ja viimeinen yhteenlaskettava jäsen $a_n = \frac{13}{3}$. Muodostetaan aritmeettisen summan kaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 16 \\
n \cdot \frac{-\frac{1}{3}+\frac{13}{3}}{2} &= 16 \\
n \cdot \frac{\frac{12}{3}}{2} &= 16 \\
n \cdot \frac{4}{2} &= 16 \\
2n &= 16 \quad \Big| :2 \\
n &= 8
\end{aligned}
$$

Vastaus: 8

303.

Aritmeettisessa summassa on 12 yhteenlaskettavaa eli $n = 12$, viimeinen yhteenlaskettava on $a_{12} = 19$ ja summan arvo on $S_n = 96$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a_1.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 96 \\
12 \cdot \frac{a_1 + 19}{2} &= 96 \\
6(a_1 + 19) &= 96 \quad \Big| :6 \\
a_1 + 19 &= 16 \\
a_1 &= 16 - 19 = -3
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) $a_1 = -3$

304.

a) Koska seuraava kerros sisältää aina kahdeksan laattaa vähemmän kuin edellinen, niin laattojen määrät kerroksissa muodostavat aritmeettisen jonon, jonka differenssi $d = -8$.

Määritetään jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 224 + (n-1)\cdot(-8) \\ &= 224 - 8n + 8 \\ &= -8n + 232 \end{aligned}$$

Lasketaan jonon yleisen jäsenen avulla, missä kerroksessa laattojen määrä on 88. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= 88 \\ -8n + 232 &= 88 \\ n &= 18 \end{aligned}$$

Joten 18. kerros on ylin kerros.

b) Lasketaan laattojen määrä aritmeettisena summana.

$$\begin{aligned} S_{18} &= 18 \cdot \frac{a_1 + a_{18}}{2} \\ &= 18 \cdot \frac{224 + 88}{2} \\ &= 2\,808 \end{aligned}$$

Laattoja on siis yhteensä 2 808.

Vastaus: a) 18. kerros   b) 2 808 laattaa

305.

a) Koska tuotteen myynti kasvaa joka viikko 25 kappaleella, tuotteen myynnit eri viikoilla muodostavat aritmeettisen jonon, jonka differenssi $d = 25$.

Määritetään jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 125 + (n-1) \cdot 25 \\ &= 125 + 25n - 25 \\ &= 25n + 100 \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 25 \cdot 10 + 100 = 350$$

10. viikolla tuotetta myytiin 350 kpl.

b) Lasketaan jonon 18. jäsen.

$$a_{18} = 25 \cdot 18 + 100 = 550$$

Lasketaan myytyjen tuotteitten määrä aritmeettisena sumana.

$$\begin{aligned} S_{18} &= 18 \cdot \frac{a_1 + a_{18}}{2} \\ &= 18 \cdot \frac{125 + 550}{2} \\ &= 6\,075 \end{aligned}$$

Liike tilasi tuotetta 6 075 kpl.

Vastaus: a) 350 kpl b) 6 075 kpl

306.

a) Koska lääkeannosta pienennetään 5 mg joka päivä, lääkeannokset eri päivinä muodostavat aritmeettisen jonon, jonka differenssi $d = 5$.

Määritetään jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 125 + (n-1)\cdot(-5) \\ &= 125 - 5n + 5 \\ &= 130 - 5n \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on 0 (mg).

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ 130 - 5n &= 0 \\ -5n &= -130 \quad \Big| :(-5) \\ n &= 26 \end{aligned}$$

Koska 26. päivänä lääkeannos on 0 mg, niin lääkekuuri kestää 25 päivää.

b) Lukujonon 26. jäsen on 0. Lasketaan 26 ensimmäisen jäsenen muodostama aritmeettinen summa.

$$\begin{aligned} S_{26} &= 26\cdot\frac{a_1 + a_{26}}{2} \\ &= 26\cdot\frac{125+0}{2} \\ &= 1\,625 \end{aligned}$$

Virtanen syö lääkettä yhteensä 1 625 mg.

Vastaus: a) 25 päivää b) 1 625 mg

307.

Koska istuimien määrä kasvaa aina 4:llä, niin istuinten määrät eri penkkiriveillä muodostavat aritmeettisen jonon, jonka differenssi $d = 4$.

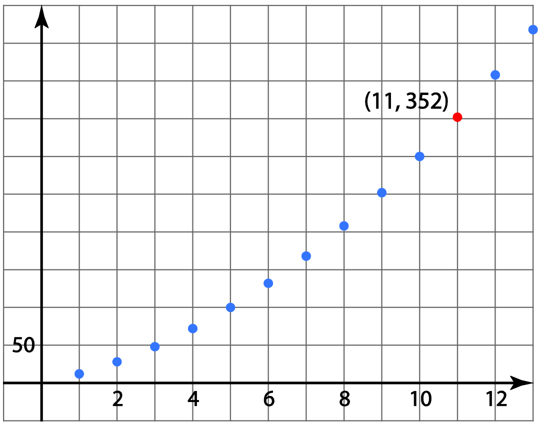
Määritetään jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 12 + (n-1)\cdot 4 \\ &= 12 + 4n - 4 \\ &= 4n + 8 \end{aligned}$$

Muodostetaan aritmeettinen summa, jossa ensimmäinen jäsen $a_1 = 12$, viimeinen jäsen $a_n = 4n + 8$ ja jäsenien lukumäärä on n.

$$\begin{aligned} S_n &= n\cdot\frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= n\cdot\frac{12 + 4n + 8}{2} \\ &= 2n^2 + 10n \end{aligned}$$

Piirretään summalausekkeesta kuvaaja ja etsitään kuvaajalta kohta, jossa summan arvo on 352.



Kun yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 11$, niin summan arvo on 352.

Vastaus: 11 penkkiriviä

308.

a) Lainaa lyhennetään joka vuosi yhtä paljon ja koko laina pitää maksaa 16 vuodessa. Lyhennyskertoja on siis 16 ja yhden lyhennyksen suuruus on

$$\frac{160\,000\text{ €}}{16} = 10\,000\text{ €}.$$

Saadaan aritmeettinen jono:
$160\,000,\ 150\,000,\ 140\,000, \ldots, 10\,000$

b) Maksettavat korot muodostavat aritmeettisen jonon. Aritmeettinen summa voidaan laskea summakaavan avulla, kun tiedetään: yhteenlaskettavien määrä $n = 16$, ensimmäinen jäsen a_1 ja viimeinen jäsen a_n.

Lasketaan ensimmäinen yhteenlaskettava jäsen ja viimeinen yhteenlaskettava jäsen.

$$a_1 = 0{,}046 \cdot 160\,000 = 7\,360$$
$$a_{16} = 0{,}046 \cdot 10\,000 = 460$$

Lasketaan summakaavan avulla koron määrä.

$$\begin{aligned} S_{16} &= 16 \cdot \frac{a_1 + a_{16}}{2} \\ &= 16 \cdot \frac{7\,360 + 460}{2} \\ &= 62\,560 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $160\,000,\ 150\,000,\ 140\,000, \ldots,\ 0$ b) $62\,560$ €

309.

a) Muodostetaan 4. jäsen

$$\begin{aligned} a_4 &= x+(4-1)\cdot 3 \\ &= x+3\cdot 3 \\ &= x+9 \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan summakaavan avulla ensimmäinen jäsen. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} S_4 &= 22 \\ 4\cdot\frac{a_1+a_4}{2} &= 22 \\ 4\cdot\frac{x+(x+9)}{2} &= 22 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Siis jonon ensimmäinen jäsen on 1.

Vastaus: a) $a_4 = x + 9$ b) $a_1 = 1$

310.

Ensimmäinen yhdeksällä jaollinen nelinumeroinen luonnollinen luku on 1 008. Eli $a_1 = 1008$. Viimeinen yhdeksällä jaollinen nelinumeroinen luonnollinen luku on 9 999. Jonon differenssi $d = 9$.

Muodostetaan jonon yleinen lauseke ja lasketaan kuinka mones jäsen on 9 999.

$$a_n = 1008 + (n-1)\cdot 9 = 9n + 999$$

$$\begin{aligned} a_n &= 9\,999 \\ 9n + 999 &= 9999 && \big| -999 \\ 9n &= 9000 && \big| :9 \\ n &= 1\,000 \end{aligned}$$

Lasketaan aritmeettisen summan kaavalla kaikkien nelinumeroisten yhdeksällä jaollisten luonnollisten lukujen summa.

$$\begin{aligned} S_{1000} &= 1\,000 \cdot \frac{a_1 + a_{9999}}{2} \\ &= 1\,000 \cdot \frac{1\,008 + 9\,999}{2} \\ &= 5\,503\,500 \end{aligned}$$

Vastaus: 5 503 500

311.

Jonon differenssi $d = 11$ ja jonon 40 ensimmäisen jäsenen summa $S_{40} = 8\,700$. Jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi pitää selvittää jonon ensimmäinen jäsen a_1.

Muodostetaan viimeinen yhteenlaskettava jäsen a_{40}.

$$a_{40} = a_1 + (40-1)\cdot 11 = a_1 + 429$$

Muodostetaan 40 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{40} = 40\cdot\frac{a_1 + (a_1 + 429)}{2} = 40a_1 + 8\,580$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a_1.

$$\begin{aligned} S_{40} &= 8\,700 \\ 40a_1 + 8\,580 &= 8\,700 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan lopuksi jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1)\cdot 11 \\ &= 3 + 11n - 11 \\ &= 11n - 8 \end{aligned}$$

Yleinen jäsen on $a_n = 11n - 8, n = 1, 2, 3, ...$

312.

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja jonon kolme ensimmäisen jäsenen summa $S_3 = 21$. Tehtävässä pitää selvittää jonon 30. jäsen, joka voidaan laskea mikäli tiedetään jonon differenssi.

Ratkaistaan ensin jonon kolmas jäsen a_3 summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_3 &= 21 \\ 3 \cdot \frac{3 + a_3}{2} &= 21 \\ a_3 &= 11 \end{aligned}$$

Ratkaistaan seuraavaksi jonon differenssi d kolmannen jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ 11 &= 3 + 2d \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea jonon 30. jäsen.

$$a_{30} = 3 + (30 - 1) \cdot 4 = 119$$

Lasketaan lopuksi jonon 30 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\begin{aligned} S_{30} &= 30 \cdot \frac{a_1 + a_{30}}{2} \\ &= 30 \cdot \frac{3 + 119}{2} \\ &= 1\,830 \end{aligned}$$

Vastaus: 1 830

313.

Tiedetään ensimmäinen yhteenlaskettava jäsen $a_1 = 2\,089$ ja viimeinen yhteenlaskettava jäsen $a_n = 3\,769.$ Lasketaan summakaavan avulla yhteenlaskettavien lukumäärä $n.$ Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $n.$

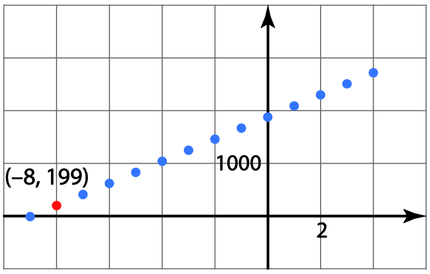
$$\begin{aligned} S_n &= 26\,361 \\ n \cdot \frac{2\,089 + 3\,769}{2} &= 26\,361 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Ratkaistaan jonon differenssi yhdeksännen jäsenen 3 769 avulla.

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 + (1-9)d \\ 3\,769 &= 2\,089 + 8d \\ d &= 210 \end{aligned}$$

b) Määritetään jonon yleinen jäsen. Piirretään jonon kuvaaja ja etsitään jonon pienin positiivinen jäsen.

Jonon yleinen jäsen $a_n = 2089 + (n-1) \cdot 210 = 210n + 1879$



Jonon pienin positiivinen kokonaisluku on 199.

HUOM: Ensimmäinen koordinaatti –8 tarkoittaa, että lukujonon pienin positiivinen jäsen 199 on yhdeksän jäsentä taaksepäin ensimmäisestä jäsenestä, joka laskettiin summaan mukaan.

Vastaus: a) $d = 210$ b) 199

314.

1) Summa alkuperäisessä järjestyksessä: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

Summa käänteisessä järjestyksessä: $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$.

2) Lasketaan summat yhteen termeittäin:

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & ... & + & a_{n-1} & + & a_n \\
+S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & ... & + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & ... & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1)
\end{array}
$$

3) Lasketaan kohdassa 2) saadut summat:

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_n &= a_1 + a_n \\
a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n \\
&\vdots \\
a_{n-1} + a_2 &= (a_1 + (n-1)d) + (a_n - (n-1)d) = a_1 + a_n \\
a_n + a_1 &= a_1 + a_n
\end{aligned}
$$

Kaikki summat ovat siis yhtä suuret $a_1 + a_n$.

4)

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ kappaletta}}$$

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad |:2$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Luku 5.5

315.

Geometrinen jono on lukujono, jonka kahden peräkkäisen jäsenen suhde on aina sama.

a) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{2}=2$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{6}{4}=1{,}5$

Koska kahden peräkkäisen jäsenen suhde ei ollut sama, niin jono ei voi olla geometrinen.

b) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{8}{-4}=-2$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{-16}{8}=-2$

Jono voi olla geometrinen.

c) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

Jono voi olla geometrinen.

d) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{1}{4}$

Koska kahden peräkkäisen jäsenen suhde ei ollut sama, niin jono ei voi olla geometrinen.

316.

a) $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{20}{4}=5$

b) $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{27}{-9}=-3$

c) $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{24}{42}^{(6}=\frac{4}{7}$

d) $q=\frac{a_2}{a_1}=-\frac{1}{6}:(-\frac{2}{3})=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{12}^{(3}=\frac{1}{4}$

317.

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1=-4$.
Jonon suhdeluku $q=3$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$a_n=-4\cdot 3^{n-1}, n=1,2,3,...$

b) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1=6$.
Lasketaan jonon suhdeluku.

$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{6}^{(2}=\frac{1}{3}$

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$a_n=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, n=1,2,3,...$

318.

a) $q=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{-6}{2}=-3.$

b) $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}, n=1,2,3,...$

c) $a_4=2\cdot(-3)^{4-1}=2\cdot(-3)^3=2\cdot(-27)=-54$

319.

a) $q=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{5}{2}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{20}{2}=10$

b) $a_n=\dfrac{1}{4}\cdot 10^{n-1}, n=1,2,3,...$

c) $a_5=\dfrac{1}{4}\cdot 10^{5-1}=\dfrac{1}{4}\cdot 10^4=\dfrac{1}{4}\cdot 10\,000=2\,500$

320.

a) $a_4=a_3\cdot q=250\cdot 5=1250$

b) $a_3=a_2\cdot q$

$250=a_2\cdot 5 \quad \Big| :5$

$a_2=50$

c) $a_2=a_1\cdot q$

$50=a_1\cdot 5 \quad \Big| :5$

$a_2=10$

d) $a_n=10\cdot 5^{n-1}, n=1,2,3,...$

321. a) Lasketaan lukujonon suhdeluku.

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{35}{5}=7.$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n=5\cdot 7^{n-1}, n=1,2,3,...$$

b) Lasketaan lukujonon 7. jäsen.

$$a_7=5\cdot 7^{7-1}=5\cdot 7^6=588\,245$$

322. a) Lasketaan lukujonon suhdeluku.

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-36}{12}=-3$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n=12\cdot(-3)^{n-1}, n=1,2,3,...$$

Nyt voidaan laskea jonon 9. jäsen.

$$a_9=12\cdot(-3)^{9-1}=12\cdot(-3)^8=78\,732$$

b) Lasketaan lukujonon suhdeluku.

$$q=-\frac{1}{2}:(-2)=\frac{1}{4}$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n=1,2,3,...$$

Nyt voidaan laskea jonon 9. jäsen.

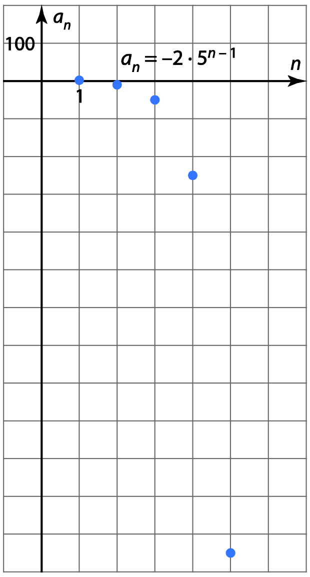
$$a_9=-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{9-1}=-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8=-2\cdot\frac{1}{65536}=-\frac{1}{32768}\approx 3{,}05\cdot 10^{-5}$$

323.

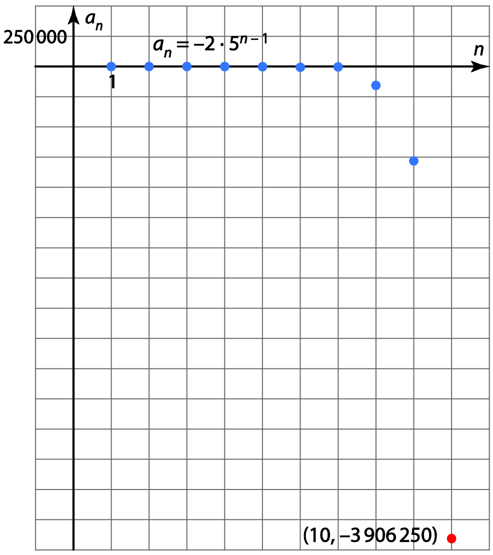
a) Sijoitetaan $n = 35$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{35} = -2 \cdot 5^{35-1} = -2 \cdot 5^{34} \approx -1{,}16 \cdot 10^{24}$$

b) Piirretään lukujonon kuvaaja yleisen jäsenen lausekkeen avulla.



c) Etsitään jäljitys-toiminnon avulla se lukujonon jäsen, joka on ensimmäisen kerran pienempi kuin −1 000 000.



Lukujonon 10. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on pienempi kuin −1 000 000.

324.

a) Lasketaan lukujonon suhdeluku.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{36}{3} = 12$$

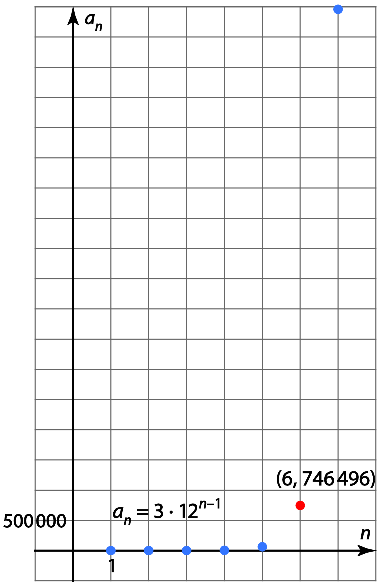
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 3 \cdot 12^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Sijoitetaan $n = 15$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{15} = 3 \cdot 12^{15-1} = 3 \cdot 12^{14} \approx 3{,}85 \cdot 10^{15}$$

c) Piirretään lukujonon kuvaaja yleisen jäsenen lausekkeen avulla.



d) Etsitään jäljitys-toiminnon avulla se lukujonon jäsen, joka on viimeisen kerran pienempi kuin 1 000 000.

Lukujonon 6 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 1 000 000.

325.

a) Lasketaan lukujonon suhdeluku.

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{24}{8}=3.$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n=8\cdot 3^{n-1}, n=1,2,3,\ldots$$

Sijoitetaan $n=40$ yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{40}=8\cdot 3^{40-1}=8\cdot 3^{39}=3{,}24\cdot 10^{19}$$

b) Tutkitaan, onko olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n, että $a_n=157\,464$.

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella.

$$\begin{aligned} a_n &= 157\,464 \\ 8\cdot 3^{n-1} &= 157\,464 \quad \Big| :8 \\ 3^{n-1} &= 19\,683 \\ n-1 &= \log_3 19\,683 \\ n-1 &= 9 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Koska ratkaisu on positiivinen kokonaisluku, luku $157\,464$ on lukujonon $10.$ jäsen.

326.

a) Yleisen jäsenen lausekkeen määrittämiseksi tarvitaan geometrisen jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q.

Määritetään jonon suhdeluku.

$$q = \frac{a_7}{a_6} = \frac{28672}{-7168} = -4$$

Jonon kuudes jäsen on toisaalta $a_6 = a_1 \cdot (-4)^5$ ja toisaalta $a_6 = -7\ 186$.

Ratkaistaan a_1.

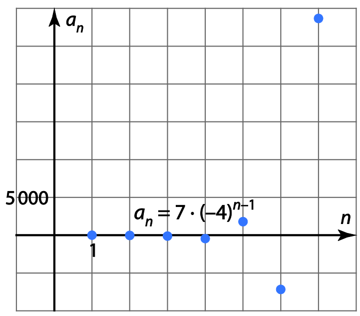
$$\begin{aligned} -7168 &= a_1 \cdot (-4)^5 \\ -7168 &= a_1 \cdot (-1024) \qquad \Big| : (-1024) \\ a_1 &= 7 \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 7 \cdot (-4)^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b)



327.

a) $q=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{-20000}{40000}=-\dfrac{1}{2}$

b) Jonon kolmas jäsen on toisaalta $a_3=a_1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$ ja toisaalta $a_3 = 40\,000$.

Ratkaistaan a_1.

$$a_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=40\,000$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella.

$$a_1\cdot\frac{1}{4}=40\,000 \quad \Big|\cdot 4$$

$$a_1=160\,000$$

c) Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 160\,000\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan jonon 9. jäsen.

$$a_9=160\,000\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^8=625$$

328.

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5{,}0\ (\text{m})$.

Koska pompun korkeus on aina $\frac{4}{5}$ edellisen pompun korkeudesta, muodostuu geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = \frac{4}{5}$.

Muodostetaan lukujonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 5{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Lasketaan lukujonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 5{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-1} = 5{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{9} = 0{,}6710\ldots \approx 0{,}67$$

Kymmenennen pompun korkeus on 67 cm.

c) Pompun korkeus pienenee jokaisella pompulla. Ratkaistaan, monennella pompulla jäsen a_n olisi 0,5 m.

$$\begin{aligned} a_n &= 0{,}5 \\ 5{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} &= 0{,}5 \\ n &\approx 11{,}318\ldots \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Siis 12. pomppu on ensimmäinen, jonka korkeus on alle 50 cm.

329.

a) Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 16$.

Koska solut jakaantuvat kahtia kerran tunnissa, muodostuu geometrinen jono, jonka suhdeluku $q = 2$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 16 \cdot 2^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Lasketaan lukujonon 12. jäsen.

$a_{12} = 16 \cdot 2^{12} = 65\,536$

c) Kahdessa vuorokaudessa on $24 \cdot 2 = 48$ tuntia. Lasketaan lukujonon 48. jäsen.

$a_{48} = 16 \cdot 2^{48} \approx 4{,}50 \cdot 10^{15}$

330.

a) Koska matkustajamäärä laskee vuosittain 8 %, seuraavan vuoden matkustajamäärä saada, kun edellinen kerrotaan prosenttikertoimella 0,92.

Muodostuu geometrinen jono, jonka ensimmäisen jäsen $a_1 = 10\,900$ ja suhdeluku $q = 0{,}92$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 10900 \cdot 0{,}92^n, n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Lasketaan lukujonon 10. jäsen.

$a_{10} = 10\,900 \cdot 0{,}92^{10} = 4734{,}834\ldots \approx 4730$

331.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1{,}0$ (m^2).

Jonon suhdeluku $q = \frac{1}{2}$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 1{,}0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A4-arkin pinta-ala on jonon 5. jäsen.

$$a_5 = 1{,}0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 0{,}0625$$

A4-arkin pinta-ala on $0{,}0625\ m^2 = 625\ cm^2$.

332.

a) Koska asukasmäärä kasvaa joka vuosi 1,2 %, seuraavan vuoden asukasmäärä saadaan, kun edellinen kerrotaan prosenttikertoimella 1,012.

Muodostuu geometrinen jono, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 24\,500$ ja suhdeluku $q = 1{,}012$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 24500 \cdot 1{,}012^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Asukasmäärä kasvaa joka vuosi. Ratkaistaan, minä vuonna jäsen a_n olisi 30 000.

$$\begin{aligned} a_n &= 30000 \\ 24500 \cdot 1{,}012^{n-1} &= 30000 \\ n &= 17{,}978\ldots \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Jonon 18. on ensimmäinen jäsen, joka ylittää arvon 30 000.
Koska a_1 tarkoittaa vuotta 2015, niin a_{18} tarkoittaa vuotta 2032.

333.

a) Koska Topiaksen paino pienenee joka kuukausi 1,0 %, seuraavan kuukauden paino saadaan kertomalla edellinen prosenttikertoimella 0,99.

Muodostuu geometrinen jono, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = 95$ (kg) ja suhdeluku $q = 0{,}99$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 95 \cdot 0{,}99^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$

Lasketaan lukujonon 13. jäsen.

$a_{13} = 95 \cdot 0{,}99^{12} = 84{,}206\ldots \approx 84$

Topias painaa vuoden kuluttua 84 kg.

b) Paino laskee joka kuukausi. Ratkaistaan, kuinka monentena kuukautena jäsen a_n olisi 80.

$$\begin{aligned} a_n &= 80 \\ 95 \cdot 0{,}99^{n-1} &= 80 \\ n &= 18{,}098\ldots \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Jonon jäsenistä 19. on ensimmäinen, jonka arvo on pienempi kuin 80.
Topias painaa alle 80 kilogrammaa 18 kuukauden kuluttua.

334.

a) Muodostetaan lukujono a_n, joka ilmaisee uusien vastaanottajien määrän n:nnellä kierroksella. Muodostuu geometrinen jono, jossa $a_1 = 3$ ja $q = 2$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Lasketaan lukujonon 10. jäsen.

$$a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 1\,536$$

b) Saajien määrä suurenee jokaisella lähetyskierroksella. Ratkaistaan, millä kierroksella jäsen a_n on 200 000.

$$\begin{aligned} a_n &= 200000 \\ 3 \cdot 2^{n-1} &= 200000 \\ n &= 17{,}024 \ldots \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

200 000:n vastaanottajan raja ylittyy 18. lähetyskierroksella.

c) Lasketaan vastaanottajien kertymä 10:llä lähetyskierroksella.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$
$= 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1\,536 = 3\,069$

Kymmenen lähetyskierroksen jälkeen ketjukirjeen on saanut 3 069 henkilöä.

335.

a) Koska suodatin poistaa epäpuhtauksista 75 % jokaisella suodatuskerralla, seuraava epäpuhtauksien määrä saadaan kertomalla edellinen prosenttikertoimella 0,25.

Muodostuu geometrinen jono, jonka ensimmäinen jäsen $a_1 = b$ (mg/l) ja suhdeluku $q = 0,25$.

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = b \cdot 0,25^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Lasketaan jonon 9. jäsen.

$$a_9 = b \cdot 0,25^8 = b \cdot 0,0000152\ldots \approx 0,000015b$$

Epäpuhtauksien määrä on tullut 0,000015-kertaiseksi.
Epäpuhtauksia on jäljellä 0,0015 %.

336.

a) $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$$\frac{3}{4} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{3}{4} = a_1 \cdot \frac{1}{8} \qquad \Big| \cdot 8$$

$$a_1 = \frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot \cancel{8}^2 = 6$$

b) $a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $a_8 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \cancel{6}^3 \cdot \frac{1}{\cancel{128}_{64}} = \frac{3}{64}$

337. Lukujono on geometrinen, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen suhde on aina sama.

Muodostetaan lukujonon peräkkäiset jäsenet a_n ja a_{n+1}, ja lasketaan niiden suhde.

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_{n+1} = 2 \cdot 3^{(n+1)-1} = 2 \cdot 3^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{2} \cdot 3^n}{\cancel{2} \cdot 3^{n-1}} = 3^{n-(n-1)} = 3^{n-n+1} = 3^1 = 3$$

Koska kahden peräkkäisen jäsenen suhde on aina 3, lukujono on geometrinen.

Luku 5.6

338.

a) Määritetään suhdelukuluku q, ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n.

$$a_1 = 2700 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{900}{2700} = \frac{1}{3} \qquad n = 4$$

Muodostetaan summakaava.

$$S_4 = 2700 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2700 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Muodostetaan summamerkintä.

$$\sum_{n=1}^{4}\left(2700 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

b) Määritetään suhdelukuluku q, ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n.

$a_1 = -5 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-15}{-5} = 3 \qquad n = 7$

Muodostetaan summakaava.

$$S_7 = -5 \cdot \frac{1-3^7}{1-3}$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -5 \cdot 3^{n-1}$$

Muodostetaan summamerkintä.

$$\sum_{n=1}^{7}(-5 \cdot 3^{n-1})$$

c) Määritetään suhdelukuluku q, ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n.

$a_1 = 2 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad n = 6$

Muodostetaan summakaava.

$$S_6 = 2 \cdot \frac{1-(-3)^6}{1-(-3)}$$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

Muodostetaan summamerkintä.

$$\sum_{n=1}^{6}(2 \cdot (-3)^{n-1})$$

339.

a) Määritetään suhdelukuluku q, ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n.

$a_1 = 1$ $\quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$ $\quad n = 4$

Lasketaan summa.

$$S_4 = 1 \cdot \frac{1-3^4}{1-3} = 1 \cdot \frac{1-81}{1-3} = 1 \cdot \frac{-80}{-2} = 1 \cdot 40 = 40$$

b) Määritetään suhdelukuluku q, ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n.

$a_1 = 1$ $\quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-2}{1} = -2$ $\quad n = 5$

Lasketaan summa.

$$S_5 = 1 \cdot \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} = 1 \cdot \frac{1+32}{3} = 1 \cdot \frac{33}{3} = 1 \cdot 11 = 11$$

c) Määritetään suhdelukuluku q, ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä n.

$a_1 = 2^2 = 4$ $\quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{(-2)^3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ $\quad n = 5$

Lasketaan summa.

$$S_5 = 4 \cdot \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} = 4 \cdot \frac{1+32}{1+2} = 4 \cdot \frac{33}{3} = 4 \cdot 11 = 44$$

340.

a) Määritetään suhdelukuluku $q,$ ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä $n.$

$$a_1 = 96 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1,03 \cdot 96}{96} = 1,03 \qquad n = 11$$

Lasketaan summa.

$$S_{11} = 96 \cdot \frac{1-(1,03)^{11}}{1-1,03} = 1229,548\ldots \approx 1230$$

b) Määritetään suhdelukuluku $q,$ ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 ja yhteenlaskettavien määrä $n.$

$$a_1 = 0,7^2 \cdot 8 \qquad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0,7^3 \cdot 8}{0,7^2 \cdot 8} = 0,7 \qquad n = 12$$

Lasketaan summa.

$$S_{12} = 0,7^2 \cdot 8 \cdot \frac{1-(0,7)^{12}}{1-0,7} = 12,885\ldots \approx 12,9$$

341.

Summakaavaan $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{6}{2} = 3$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 7$

Seitsemän ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_7 = 2 \cdot \frac{1-3^7}{1-3} = 2\,186$$

342.

a) Summakaavaan $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{6}{3} = 2$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 8$

Kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_8 = 3 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} = 765$$

b) Summakaavaan $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -5$
- suhdeluku $q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{15}{-5} = -3$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 8$

Kahdeksan ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_8 = -5 \cdot \frac{1-(-3)^8}{1-(-3)} = 8\,200$$

343.

Summakaavaan $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 12$
- suhdeluku $q = 0,4$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 7$

Seitsemän ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_7 = 12 \cdot \frac{1-0,4^7}{1-0,4} = 19,967\ldots \approx 20,0$$

344.

Geometrisen summan laskemiseksi tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4$
- yhteenlaskettavien lukumäärä n.

Yhteenlaskettavien lukumäärä voidaan selvittää geometrisen jonon yleisen jäsenen avulla. Määritetään yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n viimeisen yhteenlaskettavan 196 608 avulla.

$$3 \cdot 4^{n-1} = 196608$$

$$n = 9$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Lasketaan summa.

$$S_9 = 3 \cdot \frac{1-4^9}{1-4} = 262143$$

345.

Geometrisen summan laskemiseksi tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 8$
- suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{8} = 2$
- yhteenlaskettavien lukumäärä n.

Yhteenlaskettavien lukumäärä voidaan selvittää geometrisen jonon yleisen jäsenen avulla. Määritetään yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1}$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n viimeisen yhteenlaskettavan 16 384 avulla.

$$8 \cdot 2^{n-1} = 16384$$

$n = 12$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Lasketaan summa.

$$S_{12} = 8 \cdot \frac{1-2^{12}}{1-2} = 32760$$

346.

Geometrisen summan laskemiseksi tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -3920000$
- suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-980000}{-3920000} = \frac{1}{4}$
- yhteenlaskettavien lukumäärä n.

Yhteenlaskettavien lukumäärä voidaan selvittää geometrisen jonon yleisen jäsenen avulla. Määritetään yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -3920000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n viimeisen yhteenlaskettavan $-3\,828{,}125$ avulla.

$$-3920000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -3828{,}125$$

$$n = 6$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Lasketaan summa.

$$S_6 = -3920000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^6}{1-\frac{1}{4}} = -5225390 \approx -5230000$$

347.
Geometrisen summan laskemiseksi tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{3} = 3$
- yhteenlaskettavien lukumäärä n.

Geometrisen summan tulee olla vähintään 9 999. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n.

$$S_n > 9999 \quad \text{Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.}$$
$$3 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} > 9999$$
$$n > 8{,}014$$

Luku 9 on ensimmäinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 8{,}014$.

Jonon alusta on laskettava yhteen 9 ensimmäistä jäsentä.

348. Koska myyntitulot pienenivät joka viikko 4 %, seuraavan viikon myyntitulot saadaan kertomalla edellinen prosenttikertoimella 0,96.

Muodostuu geometrinen summa, jonka
- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3500$
- suhdeluku $q = 0{,}96$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 9$.

Lasketaan summa.

$$S_9 = 3500 \cdot \frac{1-0{,}96^9}{1-0{,}96} = 26903{,}275\ldots \approx 26\,900$$

Koko kesän myyntitulot olivat 26 900 €.

349. Koska louhitun malmin määrä laskee joka vuosi 5 %, seuraavan vuoden malmin määrä saadaan kertomalla edellinen prosenttikertoimella 0,95.

Muodostuu geometrinen summa, jonka

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 50$
- suhdeluku $q = 0{,}95$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 6$.

Lasketaan summa.

$$S_6 = 50 \cdot \frac{1-0{,}95^6}{1-0{,}95} = 264{,}908\ldots \approx 260$$

Ensimmäisen kuuden vuoden aikana malmia louhitaan 260 tonnia.

350. Koska sademäärä kasvaa joka päivä 8 %, seuraavan päivän sademäärä saadaan kertomalla edellinen prosenttikertoimella 1,08.

Muodostuu geometrinen summa, jonka

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 4$
- suhdeluku $q = 1{,}08$
- yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 7$.

Lasketaan summa.

$$S_7 = 4 \cdot \frac{1-1{,}08^7}{1-1{,}08} = 35{,}6912 \approx 36$$

Vettä satoi viikon aikana 36 mm.

351. Koska heilurin heilahdusmatka lyhenee 20 % joka heilahduksella, seuraava heilahdusmatka on 0,8-kertainen.

Muodostuu geometrinen summa, jonka

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 28$
- suhdeluku $q = 0,8$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 20$.

Lasketaan summa.

$$S_{20} = 28 \cdot \frac{1-0,8^{20}}{1-0,8} = 138,385\ldots \approx 140$$

Heilurin pää kulkee 20 heilahduksen aikana 140 cm.

352.

Koska jokainen kerros sisältää 22 % vähemmän kiveä kuin edellisen, seuraavassa kerroksessa kiven määrä on 0,78-kertainen.

Muodostuu geometrinen summa, jonka

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 16000$
- suhdeluku $q = 0,78$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 54$.

Lasketaan summa.

$$S_{54} = 16000 \cdot \frac{1-0,78^{54}}{1-0,78} = 72727,164\ldots \approx 73000$$

Pyramidissa on yhteensä 73 000 tonnia kiveä.

353.

Tarkastellaan jokaista 1 500 € talletusta erillisenä pääomana.
Jokaisen talletuksen arvo 1,037-kertaistuu vuodessa.
Talletusten loppuarvoista muodostuu geometrinen jono.

$a_1 = 1\,500 \cdot 1{,}037$
$a_2 = 1\,500 \cdot 1{,}037^2$
$a_3 = 1\,500 \cdot 1{,}037^3$
…
$a_8 = 1\,500 \cdot 1{,}037^8$

Muodostuu geometrinen summa, jonka

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1\,500 \cdot 1{,}037$
- suhdeluku $q = 1{,}037$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 8$.

Lasketaan summa.

$$S_8 = 1\,500 \cdot 1{,}037 \cdot \frac{1-1{,}037^8}{1-1{,}037} = 14\,180{,}430\ldots \approx 14\,180{,}43$$

Pääoma on 14 180,43 €.

354.

Ratkaistaan geometrisen jonon ensimmäinen termi a_1.

$$\begin{aligned} S_{10} &= 3\,844\,775 \\ a_1 \cdot \frac{1-4^{10}}{1-4} &= 3844775 \\ a_1 \cdot \frac{-1048575}{-3} &= 3844775 \\ a_1 \cdot 349525 &= 3844775 \quad \Big|: 349525 \\ a_1 &= 11 \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella.

Muodostetaan jonon yleinen termi a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 11 \cdot 4^{n-1}$$

Lasketaan jonon 10. termi.

$$a_{10} = 11 \cdot 4^{10-1} = 2883584$$

Jonon ensimmäinen termi on 11 ja kymmenes termi 2 883 584.

355.

Geometrisen summan

- suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\cancel{a} \cdot 4}{\cancel{a}} = 4$
- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = a$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 16$

Ratkaistaan a.

$$\begin{aligned} S_{16} &= 572662306 \\ a \cdot \frac{1-4^{16}}{1-4} &= 572662306 \\ a \cdot \frac{-4294967295}{-3} &= 572662306 \\ a \cdot 1431655765 &= 572662306 \quad \Big|: 1431655765 \\ a &= 0,4 \end{aligned}$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella.

356.

a) Kuutioiden särmän pituudet muodostavat geometrisen jonon, jossa

$a_1 = 1$ (m)
$a_2 = 0,5$ (m)
$a_3 = 0,5^2 = 0,25$ (m)

$a_n = 0,5^{n-1}$ (m).

b) Pinon korkeus on geometrinen summa, jonka

- suhdeluku $q = 0,5$
- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$

Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1-0,5^{10}}{1-0,5} = 1,99804\ldots \approx 1,9980$$

Pinon korkeus on 1,9980 metriä.

Lasketaan pinon korkeuden arvot, kun kuutioita on 11, 12, 13 ja 14.

$$S_{11} = 1 \cdot \frac{1-0,5^{11}}{1-0,5} \approx 1,9990$$
$$S_{12} = 1 \cdot \frac{1-0,5^{12}}{1-0,5} \approx 1,9995$$
$$S_{13} = 1 \cdot \frac{1-0,5^{13}}{1-0,5} \approx 1,9998$$
$$S_{14} = 1 \cdot \frac{1-0,5^{14}}{1-0,5} \approx 1,9999$$

Pinon korkeus näyttää lähestyvän arvoa 2 m.

357.

1) Kerrotaan summa S_4 suhdeluvulla q.

$$
\begin{aligned}
S_4 \cdot q &= (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3) \cdot q \\
&= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^4
\end{aligned}
$$

2) Muodostetaan ja sievennetään erotus $S_4 - qS_4$.

$$
\begin{aligned}
S_4 - qS_4 &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 - (a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^4) \\
&= a_1 - a_1 \cdot q^4
\end{aligned}
$$

3) Ratkaistaan yhtälöstä S_4.

$$
\begin{aligned}
S_4 - qS_4 &= a_1 - a_1 \cdot q^4 \\
S_4 \cdot (1-q) &= a_1 \cdot (1-q^4) \qquad \Big| : (1-q) \\
S_4 &= \frac{a_1 \cdot (1-q^4)}{1-q} \\
S_4 &= a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q}
\end{aligned}
$$