YHTEINEN TEKIJÄ

TEHTÄVIEN RATKAISUT

Tehtäväsarja A

1.

			−3			
		36	:	−12		
	−3	·	−12	·	1	
−14	+	11	+	−23	−	−24

2. a) $a + b = -13 + 12 = -1$

b) $-(a + b) = -(-1) = 1$

c) $-a + (-b) = 13 + (-12) = 13 - 12 = 1$

3. a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}+{}^{2)}\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

b) Pienin arvo: $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{6}+{}^{2)}\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{6}-\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

Suurin arvo: $\frac{1}{2}\cdot\left({}^{2)}\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{6}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}+{}^{4)}\frac{1}{3}=\frac{7}{12}+\frac{4}{12}=\frac{11}{12}$

4.

			$\frac{81}{20}$			
		$\frac{90}{20}$	−	$\frac{9}{20}$		
	20	·	$\frac{9}{40}$	·	2	
4	:	$\frac{1}{5}$	+	$\frac{1}{40}$	:	$\frac{1}{80}$

5.

a) $2x = 18 - 4x$

$6x = 18 \quad |:6$

$x = 3$

b) $-3(2x-4) = 12 - 3x$

$-6x + 12 = 12 - 3x$

$-3x = 0 \quad |:(-3)$

$x = 0$

c) $^{2)}\dfrac{3x}{2} - \dfrac{x}{4} = {}^{4)}5$

$\dfrac{6x}{4} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{20}{4} \quad |\cdot 4$

$6x - x = 20$

$5x = 20 \quad |:5$

$x = 4$

d) $^{2)}\dfrac{x}{3} + {}^{6)}x = {}^{3)}\dfrac{x-10}{2}$

$\dfrac{2x}{6} + \dfrac{6x}{6} = \dfrac{3x-30}{6} \quad |\cdot 6$

$2x + 6x = 3x - 30$

$5x = -30 \quad |:5$

$x = -6$

6.

a) $-6x + 24 > 0$

$-6x > -24 \quad |:(-6) < 0$

$x < 4$

b) $18 + 2y \leq 10$

$2y \leq -8 \quad |:2$

$y \leq -4$

c) $6 + 4(1-z) > -5(3z-2)$

$6 + 4 - 4z > -15z + 10$

$11z > 0 \quad |:11$

$z > 0$

7.

a) $(-5)^2+(-5)^3=25-125=-100$

b) $-4^2+2^4=-16+16=0$

c) $7^0+7^{-1}=1+\frac{1}{7^1}=\frac{7}{7}+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$

d) $3^{-2}+3^{-4}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}={}^{9)}\frac{1}{9}+\frac{1}{81}=\frac{9}{81}+\frac{1}{81}=\frac{10}{81}$

8.

a) $379\,904\,201\approx 3{,}80\cdot 10^8$

b) $106\,470\approx 1{,}06\cdot 10^5$

c) $0{,}027\,583\approx 2{,}76\cdot 10^{-2}$

d) $0{,}000\,001\,997\,80\approx 2{,}00\cdot 10^{-6}$

9.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{6^2}{5^2}=\frac{36}{25}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}=7^1=7$

10.

a) $81 \cdot 243 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9 = 19\,683$

b) $\dfrac{19\,683}{2\,187} = \dfrac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2 = 9$

c) $81^2 = (3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8 = 6\,561$

11.

a) $\dfrac{2a^3(-2a)^3}{(2a)^3 - 2a^3} = \dfrac{2a^3 \cdot (-8) \cdot a^3}{8a^3 - 2a^3} = \dfrac{-\overset{8}{\cancel{16}}\,a^6}{\underset{3}{\cancel{6}}\,a^3} = -\dfrac{8}{3}a^3$

b) $\dfrac{(2a)^3(-2a)^3}{2a^3 - (2a)^3} = \dfrac{8a^3 \cdot (-8) \cdot a^3}{2a^3 - 8a^3} = \dfrac{-\overset{32}{\cancel{64}}\,a^6}{-\underset{3}{\cancel{6}}\,a^3} = \dfrac{32}{3}a^3$

12.

a)

$$
\begin{aligned}
&5^{301} \cdot 8^{100} \cdot 0{,}1^{300} \\
&= 5^1 \cdot 5^{300} \cdot (2^3)^{100} \cdot 0{,}1^{300} \\
&= 5 \cdot 5^{300} \cdot 2^{300} \cdot 0{,}1^{300} \\
&= 5 \cdot (5 \cdot 2 \cdot 0{,}1)^{300} \\
&= 5 \cdot 1^{300} \\
&= 5 \cdot 1 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

b)

$$\frac{100^{630}}{10^{1263}} = \frac{(10^2)^{630}}{10^{1263}} = \frac{10^{1260}}{10^{1263}} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

13.

a) $4\cdot 5^x = 100 \quad |:4$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$

b) $27^x = 9^{x+1}$

$(3^3)^x = (3^2)^{x+1}$

$3^{3\cdot x} = 3^{2(x+1)}$

$3^{3x} = 3^{2x+2}$

$3x = 2x+2$

$x = 2$

c) $8^x = 4^{x+2}$

$(2^3)^x = (2^2)^{x+2}$

$2^{3\cdot x} = 2^{2\cdot(x+2)}$

$2^{3x} = 2^{2x+4}$

$3x = 2x+4$

$x = 4$

d) $3^{x+5} = 1$

$3^{x+5} = 3^0$

$x+5 = 0$

$x = -5$

14.

a) $\log_7 49 = 2$

b) $\log_2 8 = 3$

c) $\log_6 36 = 2$

15.

a) Arvo $1{,}08a$ on $108\ \%$ tuotteen alkuperäisestä arvosta a. Arvo on siis noussut $8\ \%$.

b) Arvo $0{,}64a$ on $64\ \%$ tuotteen alkuperäisestä arvosta a. Arvo on siis laskenut $36\ \%$.

c) Arvo $2{,}1a$ on $210\ \%$ tuotteen alkuperäisestä arvosta a. Arvo on siis noussut $110\ \%$.

d) Arvo $1{,}005a$ on $100{,}5\ \%$ tuotteen alkuperäisestä arvosta a. Arvo on siis noussut $0{,}5\ \%$.

16.

a) Merkitään funktioon syötettävää lukua kirjaimella x.

Lasketaan luvun puolikas: $\frac{x}{2}$

Luvun puolikkaaseen lisätään luku 2: $\frac{x}{2}+2$

Summa kerrotaan luvulla 5: $\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot 5$

Funktion lauseke on $f(x)=\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot 5$

b) $f(-2)=\left(\frac{-2}{2}+2\right)\cdot 5=(-1+2)\cdot 5=1\cdot 5=5$

$f(4)=\left(\frac{4}{2}+2\right)\cdot 5=(2+2)\cdot 5=4\cdot 5=20$

c)
$$\begin{aligned}
f(x)&=25 \\
\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot 5&=25 && \Big|:5 \\
\frac{x}{2}+2&=5 \\
\frac{x}{2}&=3 && \Big|\cdot 2 \\
x&=6
\end{aligned}$$

17. a) Funktion nollakohta:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
12 - 3x &= 0 \\
-3x &= -12 \qquad \Big| : (-3) \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Funktion arvo kohdassa nolla:

$$f(0) = 12 - 3 \cdot 0 = 12 - 0 = 12$$

b) Funktion nollakohta:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
15x - 6(2x + 3) &= 0 \\
15x - 12x - 18 &= 0 \\
3x &= 18 \qquad \Big| : 3 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Funktion arvo kohdassa nolla:

$$g(0) = 15 \cdot 0 - 6(2 \cdot 0 + 3) = 0 - 6(0 + 3) = -6 \cdot 3 = -18$$

c) Funktion nollakohta:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= 0 \\
2^{x+1} - 16 &= 0 \\
2^{x+1} &= 16 \\
2^{x+1} &= 2^4 \\
x + 1 &= 4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Funktion arvo kohdassa nolla:

$$h(0) = 2^{0+1} - 16 = 2^1 - 16 = 2 - 16 = -14$$

18.

a) $f(1) = 2$, koska kohdassa $x = 1$ funktion kuvaajan pisteen y-koordinaatti on 2.

$f(3) \approx 2$, koska kohdassa $x = 3$ funktion kuvaajan pisteen y-koordinaatti on likimain $-1{,}4$.

b) Pitää etsiä ne funktion kuvaajan pisteet, joiden y-koordinaatti on 4.
Pisteitä löytyy kolme, ja niiden x-koordinaatit ovat -3, 0 ja 6.
Siis $f(x) = 4$, kun $x = -3$, $x = 0$ tai $x = 6$.

c) Pitää etsiä ne funktion kuvaajan pisteet, joiden y-koordinaatti on 0.
Funktion nollakohdat ovat $x = -4$, $x = 2$ ja $x = 5$.

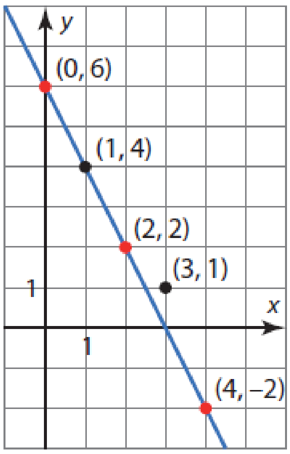
d) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun kuvaaja on x-akselin alapuolella. Funktion arvot ovat siis negatiivisia, kun $x < -4$ tai $2 < x < 5$.

19.

$f(0) = 6 - 2 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$

$f(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$

$f(4) = 6 - 2 \cdot 4 = 6 - 8 = -2$



a) Kuvaajasta huomataan, että piste (1,4) on kuvaajalla ja piste (3,1) on kuvaajan yläpuolella.

b) Piste (3,1):
Funktion arvo kohdassa 3 on $f(3) = 6 - 2 \cdot 3 = 0$.
Funktion kuvaaja kulkee siis pisteen (3,0) kautta. Piste (3,1) on kuvaajan yläpuolella.

Piste (1,4):
Funktion arvo kohdassa 1 on $f(1) = 6 - 2 \cdot 1 = 4$.
Funktion kuvaaja kulkee siis pisteen (1,4) kautta.

20.

a) Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$.
Lasketaan jonon differenssi.

$$d = a_2 - a_1 = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + (n-1)\cdot 3 = -4 + 3n - 3 = 3n - 7$$

b) Lasketaan jonon 20. jäsen.

$$a_{20} = 3\cdot 20 - 7 = 60 - 7 = 53$$

c) Luku 38 on jonon jäsen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = 38$.

$$\begin{aligned} a_n &= 38 \\ 3n - 7 &= 38 \\ 3n &= 45 \qquad \vert :3 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Koska 15 on positiivinen kokonaisluku, luku 38 on jonon jäsen.

21.

a) Merkinnästä $\sum_{n=1}^{6}(2n-1)$ nähdään, että

- jonon yleinen jäsen $a_n = 2n - 1$
- ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- viimeinen yhteenlaskettava on $a_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 11$
- yhteenlaskettavia on 6 kappaletta.

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_6 = 6 \cdot \frac{1+11}{2} = 6 \cdot \frac{12}{2} = 6 \cdot 6 = 36$$

b) Merkinnästä $\sum_{n=3}^{5}(3n+1)$ nähdään, että

- jonon yleinen jäsen $a_n = 3n + 1$
- ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$
- viimeinen yhteenlaskettava on $a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$
- yhteenlaskettavia on 3 kappaletta.

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_3 = 3 \cdot \frac{10+16}{2} = 3 \cdot \frac{26}{2} = 3 \cdot 13 = 39$$

22.

a) Lukujonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = -2a_{n-1} + 5$ avulla.

$a_1 = 1$

$a_2 = -2 \cdot a_1 + 5 = -2 \cdot 1 + 5 = -2 + 5 = 3$

$a_3 = -2 \cdot a_2 + 5 = -2 \cdot 3 + 5 = -6 + 5 = -1$

$a_4 = -2 \cdot a_3 + 5 = -2 \cdot (-1) + 5 = 2 + 5 = 7$

$a_5 = -2 \cdot a_4 + 5 = -2 \cdot 7 + 5 = -14 + 5 = -9$

b) Lukujonon jäsenet kolmannesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ avulla.

$a_1 = -1$

$a_2 = 2$

$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

$a_4 = a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$

$a_5 = a_4 - a_3 = 1 - 3 = -2$

23.

a) Geometrisen jonon ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{2}{3}$. .

Lasketaan jonon suhdeluku.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6}^{(2} = \frac{1}{3}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, n = 1, 2, 3, ...$$

b) Geometrisen jonon suhdeluku $q = -2$ ja toinen jäsen $a_2 = -6$. Ratkaistaan ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ -6 &= a_1 \cdot (-2) \qquad\qquad |:(-2) \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1}, n = 1, 2, 3, ...$$

24.

a) Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja viides jäsen $a_5 = 17$.
Ratkaistaan jonon differenssi.

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d \\ 17 &= 5 + 4d \quad \Big| -5 \\ 12 &= 4d \quad \Big| :4 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 5 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 5 + 3n - 3 \\ &= 3n + 2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan jonon kymmenes jäsen.

$$a_{10} = 3\cdot 10 + 2 = 30 + 2 = 32$$

25. Verrataan lauseketta $S = 12\cdot\dfrac{1-5^{13}}{1-5}$ geometrisen summan kaavaan $S_n = a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

a) Jonon alusta laskettiin 13 jäsentä yhteen.

b) Jonon suhdeluku on 5

c) Jonon ensimmäinen jäsen on 12.

d) Jonon toinen jäsen on $a_2 = a_1\cdot q^1 = 12\cdot 5^1 = 60$.

e) $S = 10\cdot\dfrac{1-3^{13}}{1-3}$

26. Summa $2 + 4 + 6 + \ldots + 198 + 200$ on aritmeettinen.

Määritetään differenssi d ja jonon yleinen jäsen a_n.

$d = 4 - 2 = 2$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n viimeisen yhteenlaskettavan 200 avulla.

$$\begin{aligned} 2n &= 200 && \big| :2 \\ n &= 100 \end{aligned}$$

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{a_1 + a_{100}}{2} = 100 \cdot \frac{2+200}{2} = 100 \cdot \frac{202}{2} = 100 \cdot 101 = 10100$$

Tehtäväsarja B

1.

a) $-8^2+10-6:2=-64+10-3=-57$

b) Suurin arvo: $(-8)^2+10-6:2=64+10-3=71$

Pienin arvo: $-(8^2+10)-6:2=-74-3=-77$

Vastaus: a) -57 b) suurin 71, pienin -77

2.

Vastanneita radiokuuntelijoita oli yhteensä 120 kpl.

Koska Radiojatsin valitsi $\frac{3}{5}$ vastaajista ja Klassikko-radion $\frac{1}{4}$, niin Uutisradion valitsi $1-\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$ vastaajsita.

Uutisradion valinneita vastaajia oli $120\cdot\frac{3}{20}=\frac{360}{20}=18$.

Vastaus: Uutisradion valinneita oli $\frac{3}{20}$ eli 18 vastaajaa.

3. Yhtälöt ja epäyhtälö ratkaistaan laskimen *solve*- tai *ratkaise*-toiminnolla.

a) $-3(2-4x)-(10x-3)=1-3x$

$$x=\frac{4}{5}$$

b) $\frac{1}{3}+\frac{x}{4}=\frac{1+x}{6}$

$x=-2$

c) $8x+5>3(5x+4)-14$

$x<1$

4.

a) Sijoitetaan yhtälöön $x=3$ ja ratkaistaan yhtälöstä muuttuja a.

$$3(a+3)+3a=2a+6$$ Ratkaise yhtälöstä muuttuja *a* laskimella.

$$a=-\frac{3}{4}$$

b) Sijoitetaan yhtälöön $x=3$ ja ratkaistaan yhtälöstä muuttuja a.

$$\frac{2a}{3}-\frac{2\cdot 3}{3}=3-3a$$

$$\frac{2a}{3}-2=3-3a$$ Ratkaise yhtälöstä muuttuja *a* laskimella.

$$a=\frac{15}{11}$$

5. Ensimmäisenä päivänä eno maksaa 1 sentin. Jokaisena päivänä tämän jälkeen palkkio kaksinkertaistuu, joten 31. päivänä palkkio on kaksinkertaistunut 30 kertaa. Lasketaan palkkion suuruus 31. päivänä.

$$1\cdot\underbrace{2\cdot 2}_{30kpl}$$

$$=1\cdot 2^{30}$$

$$=1\,073\,741\,824 \text{ (senttiä)}$$

Muutetaan palkkion suuruus euroiksi ja pyöristetään miljoonan tarkkuuteen.

1 073 741 824 senttiä = 10 737 418,42 € ≈ 11 miljoonaa euroa.

Vastaus: 11 miljoonaa euroa.

6.

a) Matka = 1,000 m

Aika = $4,87 \cdot 10^{-9}$ s

Lasketaan laservalon nopeus.

$$\begin{aligned}\text{nopeus} &= \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} \\ &= \frac{1{,}000\ \text{m}}{4{,}87 \cdot 10^{-9}\ \text{s}} \\ &= 205338809\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 2{,}05338809 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s} \\ &\approx 2{,}05 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

b) Valon taajuus $f = 7{,}40 \cdot 10^{14}\, Hz$

Laservalon nopeus $c = 2{,}05 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}$

Ratkaistaan ensin yhtälöstä $f\lambda = c$ valon aallon pituus.

$$f\lambda = c \quad \Big|:f$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Lasketaan valon aallonpituus.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}05 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7{,}40 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 2{,}770270... \cdot 10^{-7}\,\text{m} \approx 2{,}77 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$$

Vastaus: a) $2{,}05 \cdot 10^{8}$ m/s b) $2{,}77 \cdot 10^{-7}$ m

7.

a) $10+10^{x}=25$

$$10^{x}=15$$

$$x=\log_{10}15$$

$$x=1{,}17609...\approx 1{,}18$$

b) $5^{2x}=2$

$$2x=\log_{5}2 \quad \Big|:2$$

$$x=\frac{\log_{5}2}{2}$$

$$x=0{,}215338...\approx 0{,}22$$

c) $7^{3x}=129$

$$3x=\log_{7}129 \quad \Big|:3$$

$$x=\frac{\log_{7}129}{3}$$

$$x=0{,}832483...\approx 0{,}83$$

d) $1-0{,}5^{x}=0{,}9$

$$-0{,}5^{x}=-0{,}1 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$0{,}5^{x}=0{,}1$$

$$x=\log_{0{,}5}0{,}1$$

$$x=3{,}321928...\approx 3{,}32$$

Vastaus: $x=\log_{10}15\approx 1{,}18$ b) $x=\dfrac{\log_{5}2}{2}\approx 0{,}22$ c) $x=\dfrac{\log_{7}129}{3}\approx 0{,}83$ d) $x=\log_{0{,}5}0{,}1\approx 3{,}32$

8.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan arvo laskimella.

a) Funktion $23\ 000 \cdot 1{,}3^t$ arvon tulee olla 1 000 000.

$$23\,000 \cdot 1{,}3^t = 1\,000\,000$$
$$t = 14{,}3779... \approx 14$$

Matkapuhelin liittymiä oli 1 miljoona 14 vuoden kuluttua vuodesta 1980 eli vuonna 1980 + 14 = 1994.

b) Funktion $23\ 000 \cdot 1{,}3^t$ arvon tulee olla 2 000 000.

$$23\,000 \cdot 1{,}3^t = 2\,000\,000$$
$$t = 17{,}0198... \approx 17$$

Matkapuhelin liittymiä oli 2 miljoonaa 17 vuoden kuluttua vuodesta 1980 eli vuonna 1997.

c) Funktion $23\ 000 \cdot 1{,}3^t$ arvon tulee olla 4 000 000.

$$23\,000 \cdot 1{,}3^t = 4\,000\,000$$
$$t = 19{,}66180... \approx 20$$

Matkapuhelin liittymiä oli 4 miljoonaa 20 vuoden kuluttua vuodesta 1980 eli vuonna 2000.

Vastaus: a) vuonna 1994 b) vuonna 1997 c) vuonna 2000

9.

Alkuperäistä sähkön hintaa ei tiedetä, joten merkitään sitä kirjaimella a.

Muodostetaan hinnan muutoksia vastaavat prosenttikertoimet.

1) 100 % + 7,5 % = 107,5% = 1,075
2) 100 % + 2,5 % = 102,5 % = 1,025
3) 100 % – 9,0 % = 91 % = 0,91
4) 100 % – 1,5 % = 98,5 % = 0,985

Lasketaan lopullinen sähkönhinta.

$0{,}985 \cdot 0{,}91 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}075a = 0{,}98766\ldots a \approx 0{,}988a$

Alkuperäisestä hinnasta on jäljellä 98,8 %, joten hinta on laskenut 100 % – 98,8 % = 1,2 %.

Vastaus: 1,2 %

10.

Alkuperäinen matka on s ja aika t. Keskinopeus v on tällöin $v=\frac{s}{t}$.

Kun matka pitenee 20 %, uusi matka on 1,20*s*.
(Prosenttikerroin 100 % + 20 % = 120 % =1,2)

Kun aikaa kuluu 10 % enemmän, uusi aika on 1,10*t*.
(Prosenttikerroin 100 % + 10 % = 110 % = 1,10)

Matkan uusi keskinopeus on

$$\frac{1,2s}{1,1t}=1,09090...\frac{s}{t}\approx 1,091\frac{s}{t}=1,091v\,.$$

Uusi keskinopeus on siis 109,1 % alkuperäisestä keskinopeudesta.
Keskinopeus nousee 109,1 % – 100 % = 9,1 %.

11.
Lasketaan etikkahapon määrä salaatinkastiketta varten laimennetussa ruokaetikassa.

$$0,04\cdot 1,5=0,06\quad \text{(dl)}$$

Merkitään ruokaetikan määrää kirjaimella x. Ruokaetikka sisältää 10 % etikkahappoa. Lasketaan, kuinka suuressa määrässä ruokaetikkaa on etikkahappoa 0,06 dl.

$$\begin{aligned} 0,1\cdot x&=0,06 &&|:0,1\\ x&=\frac{0,06}{0,1}\\ x&=0,6\,\text{(dl)} \end{aligned}$$

Ruokaetikkaa tarvitaan siis 0,6 dl ja vettä 1,5 dl – 0,6 dl = 0,9 dl.

Vastaus: 0,6 dl ruokaetikkaa ja 0,9 dl vettä

12.

a) Jäsenelle kustannukset muodostuvat jäsenyysmaksusta 55 € ja kertamaksuista 10 €/kerta. Kun kuntosalia käytetään x kertaa, niin kertalippujen kustannukset ovat $10x$ euroa.

Jäsenen kuntosalikäyntikustannuksia kuvaa funktio $f(x) = 55 + 10x$.

Ei-jäsenellä kustannukset muodostuvat pelkästään kertamaksuista 12,50 €/kerta. Kun kuntosalia käytetään x kertaa, niin kertalippujen kustannukset ovat $12{,}5x$ euroa.

Ei-jäsenen kuntosalikustannuksia kuvaa funktio $g(x) = 12{,}5x$.

b) Lasketaan millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 55 + 10x &= 12{,}5x \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Siis salilla pitää käydä 22 kertaa, jotta kustannukset ovat yhtä suuret.

Vastaus: a) jäsenelle $f(x) = 55 + 10x$, ei-jäsenelle $g(x) = 12{,}5x$ b) 22 kertaa

13.

a) Kännykkäliittymän A kuukausilasku muodostuu kuukausimaksusta 4 € ja puhelumaksusta 0,09 €/min. Kun kuukaudessa puhutaan x minuuttia, niin puhelumaksu on $0{,}09x$ euroa.

Kännykkäliittymän A kuukausilaskua kuvaa funktio $\mathrm{A}(x) = 4 + 0{,}09x$.

Kännykkäliittymän B kuukausilasku muodostuu pelkästään puhelumaksusta 0,12 €/min. Kun kuukaudessa puhutaan x minuuttia, niin puhelumaksu on $0{,}12x$ euroa.

Kännykkäliittymän B kuukausilaskua kuvaa funktio $\mathrm{B}(x) = 0{,}12x$.

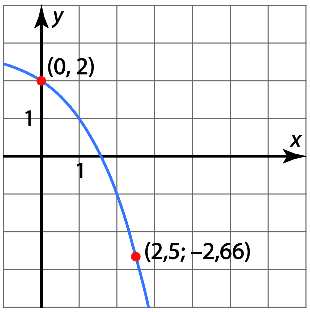
b) Lasketaan millä muuttujan x arvolla $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(\mathrm{x})$.

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x) \\ 4 + 0{,}09x &= 0{,}12x \\ x &= 133\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Joten puheaika pitää olla $133\frac{1}{3}$ min, joka on 2h 13min ja 20s.

Vastaus: a) $\mathrm{A}(x) = 4 + 0{,}09x$, $\mathrm{B}(x) = 0{,}12x$ b) $133\frac{1}{3}$ min eli 2 h 13 min ja 20 s

14.



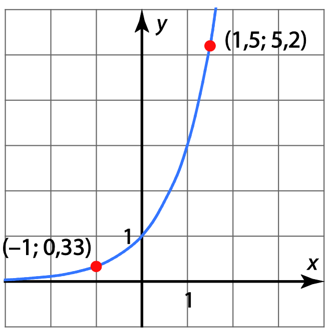
a) $f(0)=2$ ja $f(2{,}5)\approx -2{,}7$.

b) $f(x)=-1$, kun $x=2$.

c) $f(x)=1{,}5$,kun $x\approx 0{,}6$.

15.

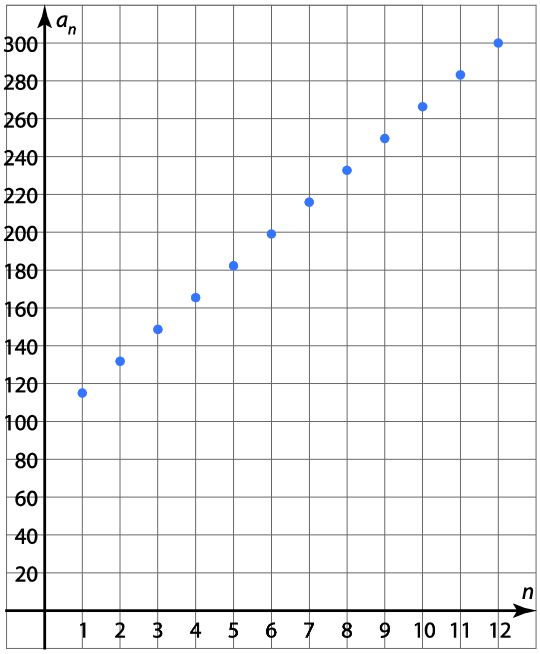
a)



a) $3^{-1}\approx 0{,}3$ ja $3^{1,5}\approx 5{,}2$.

b) $\log_3 8\approx 1{,}9$ ja $\log_3 12\approx 2{,}3$.

16. a)

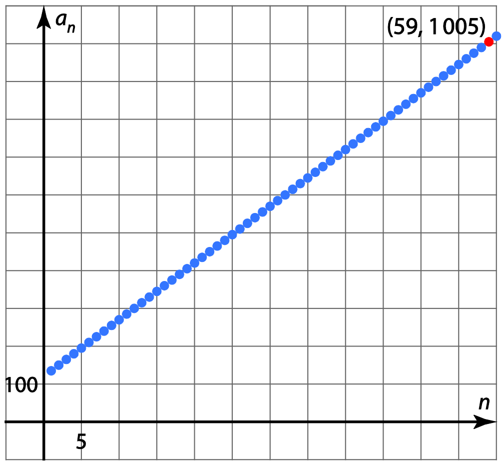


b) Tutkitaan löytyykö sellainen positiivinen kokonaisluku n, että $a_n = 12\,455$.

$$a_n = 12\,455$$
$$15n + 120 = 12\,455$$
$$n = 822{,}33333...$$

Koska yhtälön ratkaisuva oleva luku 822,333... ei ole positiivinen kokonaisluku, luku 12 455 ei ole jonon jäsen.

c) Etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti ylittää ensimmäisen kerran arvon 1000.



Lukujonon 59. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin 1000.

Vastaus: b) ei ole c) 59. jäsenestä alkaen

17.

Lasketaan jonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

OHJE: Syötä ensimmäisen sarakkeen ensimmäiselle riville ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$. Kirjoita toiselle riville kaava, jolla saat laskettua toisen jäsenen arvon: ' $= 4 \cdot a_1 - 3$ '. Kopioi kaavaa niin monta kertaa, että saat rivillä 10 olevan jäsenen näkyviin.

Myös 10 ensimmäisen jäsenen summa voidaan laskea taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C
1	2		
2	5		
3	17		
4	65		
5	257		
6	1025		
7	4097		
8	16385		
9	65537		
10	262145	SUMMA	349535

a) $a_{10} = 262\,145$ b) summa on 349 535

18.

a) Lasketaan aritmeettisen jonon differenssi.

$d = a_2 - a_1 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 7$

Lasketaan 10. jäsen.

$a_{10} = 5 \cdot 10 - 7 = 43$

b) Lasketaan aritmeettisen jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = n \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{-2+43}{2} = 205$$

c) Yleisen jäsenen tulee olla suurempi kuin 100. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} 5n - 7 &> 100 \\ n &> 21{,}4 \end{aligned}$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 21{,}4$ on 22. Siis lukujonon 22. jäsen on ensimmäinen, joka on suurempi kuin 100.

a) $a_{10} = 43$ b) $S_{10} = 205$ c) 22. jäsen

19.

a) Lasketaan geometrisen jonon suhdeluku.

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan 10. jäsen.

$$a_{10}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{10-1}=76{,}8867...\approx 76{,}9$$

b) Lasketaan geometrisen jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10}=a_1\frac{1-q^n}{1-q}=2\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1-\frac{3}{2}}=226{,}660...\approx 226{,}7$$

c) Yleisen jäsenen tulee olla suurempi kuin 100. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}>100$$
$$n>10{,}648...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 10{,}648...$ on 11. Siis lukujonon 11. jäsen on ensimmäinen, joka on suurempi kuin 100.

Vastaus: a) $a_{10} \approx 76{,}9$ b) $S_{10} \approx 226{,}7$ c) 11. jäsen

20.

a) Koska tölkkien määrä lisääntyy jokaisessa kerroksessa yhtä monella tölkillä, muodostaa tölkkien määrät eri kerroksissa aritmeettisen jonon. Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$, differenssi $d = 4$.

Muodostetaan aritmeettisen jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 3 + (n-1)\cdot 4 \\ &= 3 + 4n - 4 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

b) Selvitetään kuinka mones lukujonon jäsen on 63. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan n arvo.

$$\begin{aligned} a_n &= 63 \\ 4n - 1 &= 63 \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Siis alimmainen kerros on 16. kerros.

c) Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{16} = 16\cdot\frac{a_1 + a_{16}}{2} = 16\cdot\frac{3+63}{2} = 528$$

Vastaus: a) $a_n = 4n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ b) 16. kerros c) 528 tölkkiä

21.

a) Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 12000$ ja suhdeluku $q = 0,6.$ Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$a_n = a_1 q^{n-1} = 12\,000 \cdot 0,6^{n-1}$

b) Lasketaan jonon 12. jäsen.

$a_{12} = 12\,000 \cdot 0,6^{12-1} = 43,5356... \approx 43,5$

c) Lasketaan geometrisen summan arvo.

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = 12\,000 \cdot \frac{1-0,6^{10}}{1-0,6} = 29\,818,601... \approx 29\,800$$

Vastaus: a) $a_n = a_1 q^{n-1} = 12\,000 \cdot 0,6^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$ b) $a_{12} \approx 43,5$ c) $S_{10} \approx 29\,800$

22.

Koska talletettava summa kasvaa joka vuosi 20 %, niin talletettava summa 1,2-kertaistuu joka vuosi. Talletettavat summa muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $a_1 = 500$ ja $q = 1,2$.

Lasketaan jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa eli geometrinen summa.

$$S_{10} = 500 \cdot \frac{1-1,2^{10}}{1-1,2} = 12979,341... \approx 12\,979$$

Tilille talletetaan yhteensä 12 979€.

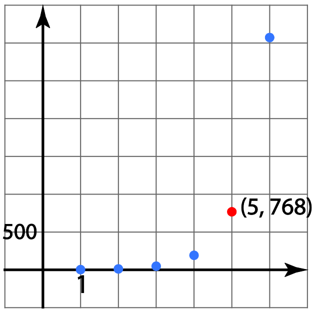
Vastaus: 12 979 €.

23.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4$. Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Piirretään lukujonon kuvaaja.



b) Luku 768 on lukujonon 5. jäsen: $a_5 = 768$.

c) Merkitään tarvittavien jäsenien lukumäärää kirjaimella n. Muodostetaan geometrisen summan lauseke.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-4^n}{1-4} = -(1-4^n) = 4^n - 1$$

TAPA1: Epäyhtälö

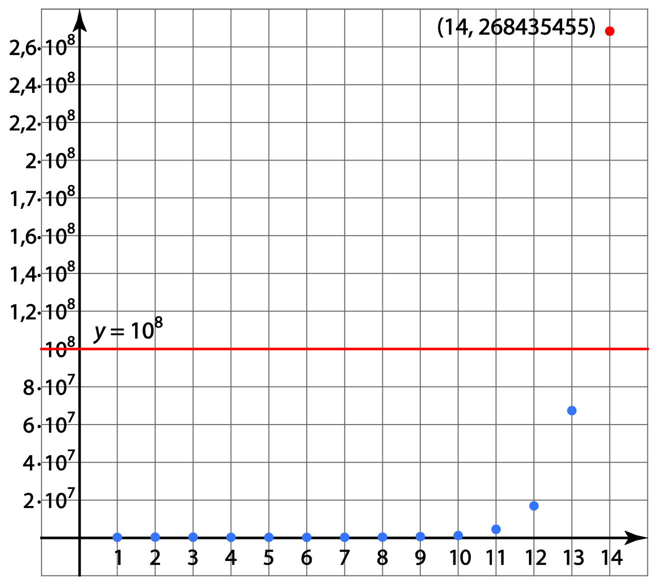
Summan tulee olla suurempi kuin 10^8. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} 4^n - 1 &> 10^8 \\ n &> 13{,}2877... \end{aligned}$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 13{,}2877...$ on 14. Siis pitää laskea vähintään 14 jäsentä yhteen, jotta summa ylittää 10^8.

TAPA2: Kuvaaja

Piirretään summalausekkeen kuvaaja ja etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti on ensimmäisen kerran yli 10^8 = 100 000 000.



Vähintään 14. jäsentä pitää laskea yhteen, jotta summan arvo on suurempi kuin 10^8.

Vastaus: a) $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$ b) On, 5. jäsen. c) vähintään 14 jäsentä

24.

a) Ensimmäisen vuoden alussa pääoma on 500 000 € , joten lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 500\,000$.

Säätiö jakaa vuoden aikana apurahoina 15 % pääomasta, minkä jälkeen pääomasta on jäljellä 85 %.

Ensimmäisen vuoden lopussa ennen valtion avustusta pääoma on siis $0{,}85 \cdot 500\,000$ euroa.

Kun säätiö saa valtiolta 30 000 euron avustuksen, kuvaa säätiön pääomaa (euroina) lauseke $0{,}85 \cdot 500\,000 + 30\,000$.

Siis $a_2 = 0{,}85 \cdot 500\,000 + 30\,000 = 0{,}85a_1 + 30\,000$.

Vastaavasti $a_3 = 0{,}85a_2 + 30\,000$.

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 500\,000 \\ a_n = 0{,}85a_{n-1} + 30\,000, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Lasketaan rekursiivisen lukujonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	500000
2	455000
3	416750
4	384237.5
5	356601.88
6	333111.59
7	313144.85
8	296173.13
9	281747.16
10	269485.08

b) $a_7 \approx 313\,145$ €

c) Pääoma alittaa 250 000 € ensimmäisen kerran 13. vuoden alussa, joten 14. vuonna voidaan ensimmäisen kerran jättää apurahat jakamatta.

Vastaus: a) $\begin{cases} a_1 = 500\,000 \\ a_n = 0{,}85a_{n-1} + 30\,000, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$ b) 313 145 € c) 14. vuonna

25.

a) Koska seuraavaan pinoon tulee aina 5 kolikkoa enemmän kuin edelliseen, muodostavat kolikkojen lukumäärät pinoissa aritmeettisen jonon. Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja differenssi $d = 5$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 3 + (n-1)5 \\ &= 3 + 5n - 5 \\ &= 5n - 2 \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 8. jäsen.

$$a_8 = 5 \cdot 8 - 2 = 40 - 2 = 38.$$

Joten 8. pinossa on 38 kolikkoa.

b) Lasketaan ensin kuinka monta kolikkoa on 10. pinossa.

$$a_{10} = 5 \cdot 10 - 2 = 50 - 2 = 48.$$

Yhden kolikon paksuus on 2,20mm, joten 48 kolikon paksuus on
$48 \cdot 2{,}20 \text{ mm} = 105{,}6 \text{ mm} \approx 106 \text{ mm}.$

c) Aritmeettisen summan laskemiseksi pitää selvittää viimeinen yhteenlaskettava eli jonon 7. jäsen.

$$a_7 = 5 \cdot 7 - 2 = 35 - 2 = 33$$

Lasketaan aritmeettisen jonon 7 ensimmäisen jäsenen summa eli aritmeettinen summa.

$$S_7 = 7 \cdot \frac{a_1 + a_7}{2} = 7 \cdot \frac{3 + 33}{2} = 126$$

7 ensimmäisessä pinossa on kolikoita yhteensä 126 kpl.

Yhden kolikon paino on 8,50g, joten 126 kolikkoa painaa $8{,}50 \text{ g} \cdot 126 = 1071 \text{ g} \approx 1070 \text{ g}.$

126 kpl kahden euron kolikkoja on arvoltaan $2 \text{ €} \cdot 126 = 252 \text{ €}.$

Vastaus: a) 38 kolikkoa b) 106 mm c) 1070 g, 252 €